V. Ilín. E. Pozniak

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

2

EDITORIAL - MIR - MOSCÚ

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

В. А. Ильин, Э. Г. Позняк

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

в 3 томах

Том 2

Москва
«Наука»

V. Ilín, E. Pozniak

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

En 3 tomos

2



EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por la licenciada en matemáticas aplicadas M. Andriánova y el ingeniero K. Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-002002-4
ISBN 5-03-002060-8

ÍNDICE

Capitulo 1

INTEGRAL DEFINIDA

En el capítulo 1 del tomo 1 hemos considerado el problema de la física en el cual calculamos el camino recorrido por el punto material que se movia a lo largo del eje Oy con una velocidad determinada y el problema de la geometría en el cual calculamos el área del *trapecio curvilíneo* (es decir, la figura que se halla entre la gráfica de la función $y = f(x)$ y el segmento $[a, b]$ del eje Ox). Resolviendo estos dos problemas llegamos a la conclusión de que es necesario introducir el nuevo concepto matemático, el de *integral definida*. Además de dos problemas considerados, algunos otros problemas importantes de la física y geometría llevan también al concepto de integral definida. En el presente capitulo exponemos la teoría de la integral definida. En el siguiente capitulo aplicaremos esta teoría en algunos problemas de la física y geometría.

§ 1. Sumas integrales. Integrabilidad

Sea la función $f(x)$ dada en el segmento $[a, b]$, $a < b$. Mediante el símbolo T denotemos la partición del segmento $[a, b]$ empleando algunos puntos no coincidentes uno con otro $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ en n segmentos parciales $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se denominarán puntos de la partición T. Sean ξ_i punto arbitrario del segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ y Δx_i diferencia $x_i - x_{i-1}$ que a continuación se denominará longitud del segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$.

Definición 1. *El número $I\{x_i, \xi_i\}$, en el cual*

$$I\{x_i, \xi_i\} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

se denomina suma integral de la función $f(x)$ correspondiente a la partición dada T del segmento $[a, b]$ y la elección dada de los puntos intermedios ξ_i en los segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$. A continuación, mediante Δ se denotará *la longitud del segmento parcial máximo* de la partición T, es decir, $\Delta = \max \Delta x_i$.

Aclaremos el sentido geométrico de la suma integral. Para hacerlo, consideremos un *trapecio curvilíneo*, o sea, una figura limitada por la gráfica de la función $f(x)$ (para la simplicidad, tomaremos la función positiva y continua), dos ordenadas trazadas por los puntos a y b del eje de abscisas y el mismo eje de abscisas (fig. 1.1). Evidente-

mmente, la suma integral $I\{x_i, \xi_i\}$ es el área de la figura escalonada rayada en la fig. 1.1.

Definición 2. El número I se denomina límite de las sumas integrales $I\{x_i, \xi_i\}$ *para* $\Delta \to 0$ *si para cualquier número positivo* ε *se puede indicar un número positivo* δ *) *tal que para toda partición T del segmento* $[a, b]$, *en el cual la longitud máxima* Δ *de los segmentos parciales es menor de* δ, *independientemente de la elección de los puntos* ξ_i *en los segmentos* $[x_{i-1}, x_i]$ *se cumple la desigualdad*

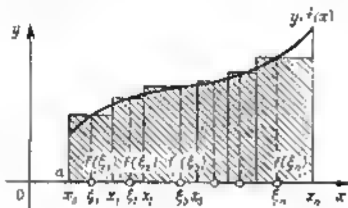


Fig. 1.1

$$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon.$$

Para denotar el límite de las sumas integrales se usan los símbolos

$$I = \lim_{\Delta \to 0} I\{x_i, \xi_i\}.$$

Definición 3. La función $f(x)$ *se denomina integrable (según Riemann* **)) *en el segmento* $[a, b]$ *si existe el límite finito I de las sumas integrales de esta función para* $\Delta \to 0$. *Dicho límite I se denomina integral definida de la función* $f(x)$ *por el segmento* $[a, b]$ *y se denota del modo siguiente:*

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Las representaciones geométricas muestran ***) que la integral definida es igual numéricamente al área del trapecio curvilíneo determinado por la gráfica de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. En el capítulo 2 demostraremos la validez de esta afirmación.

Aduzcamos el ejemplo de la *función integrable*. Demostremos que la función $f(x) = c = \text{const}$ es integrable en cualquier segmento $[a, b]$ con tal que $\int_a^b c\, dx = c(b-a)$. En efecto, como $f(\xi_i) = c$ para cualesquiera ξ_i, se tiene

$$I\{x_i, \xi_i\} = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + \ldots + c\Delta x_n =$$
$$= c(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = c(b-a).$$

Por eso, $\lim\limits_{\Delta \to 0} I\{x_i, \xi_i\} = c(b-a)$.

Aclaremos el problema de la integrabilidad de las funciones no acotadas en el segmento $[a, b]$.

*) Ya que el número δ depende de ε, a veces se escribe $\delta = \delta(\varepsilon)$.
**) Bernhard Riemann, matemático alemán (1826—1866).
***) Véase el § 4 del cap. 1 en el tomo 1.

Demostremos la siguiente afirmación: *la función no acotada en el segmento* $[a, b]$ *no es integrable en este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea que la función $f(x)$ no está acotada en el segmento $[a, b]$. Entonces no está acotada en un segmento parcial del segmento $[x_{k-1}, x_k]$ de *cualquier* partición T dada del segmento $[a, b]$. Por eso, el sumando $f(\xi_k)\Delta x_k$ de la suma integral $I\{x_i, \xi_i\}$ correspondiente a esta partición T puede hacerse cualquiera grande que sea en su valor absoluto variando la elección del punto ξ_k. De aquí se desprende que las sumas integrales $I\{x_i, \xi_i\}$ que corresponden a cualquier partición T no están acotadas *) y por eso no existe límite finito de las sumas integrales.

Conforme a la afirmación demostrada, consideraremos solamente las funciones acotadas en el segmento $[a, b]$. Surge la pregunta, *si toda función acotada en el segmento* $[a, b]$ *es integrable en este segmento.* El siguiente ejemplo muestra que eso, hablando en general, no es así. Cerciorémonos de que la *función de Dirichlet* acotada, sin duda, en el segmento $[a, b]$ y cuyos valores en los puntos racionales son iguales a la unidad y, en los irracionales, a cero, *no es integrable* en el segmento $[a, b]$. En efecto, si *para cualquier* partición T con Δ, *cualquiera pequeña que sea*, elegimos los puntos racionales ξ_i, entonces, es obvio que $I\{x_i, \xi_i\} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$. Si para la misma partición T elegimos los puntos irracionales ξ_i, entonces $I\{x_i, \xi_i\} = 0$. Por eso, para la función de Dirichlet no existe límite de las sumas integrales, o sea, esta función no es integrable.

A continuación, demostraremos la integrabilidad de todas las funciones continuas y una clase amplia de funciones discontinuas.

§ 2. Sumas superiores e inferiores

1. Concepto de sumas superior e inferior. Sea la función $f(x)$ acotada en el segmento $[a, b]$ y sea T partición de este segmento por los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Mediante M_i y m_i denotemos respectivamente la cota superior exacta y la inferior exacta de esta función en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$. *Las sumas*

$$S = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

*) Para cerciorarse de esto, basta fijar los puntos ξ_i en todos los segmentos parciales de la partición T, excepto el segmento $[x_{k-1}, x_k]$. Entonces, en la suma integral $I\{x_i, \xi_i\}$ variará solamente el sumando $f(\xi_k)\Delta x_k$ que puede ser cualquier grande que sea en su valor absoluto.

y

$$s = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

se denominan respectivamente sumas superior e inferior de la función $f(x)$ para la partición T del segmento $[a, b]$.

Es obvio que *toda suma integral $I\{x_i, \xi_i\}$ de la partición dada T del segmento $[a, b]$ se comprende entre las sumas superior S e inferior s de esta partición.*

Los conceptos de sumas *superior* e *inferior* se hacen bien evidentes si nos referimos a representaciones geométricas. Para la simplicidad, consideremos una función continua y positiva $f(x)$ y el trapecio curvilíneo determinado por esta función (las figs. 1.2 y 1.3). Si T es

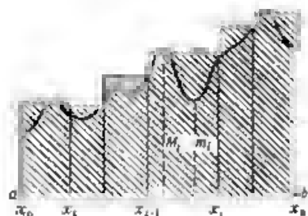


Fig. 1.2

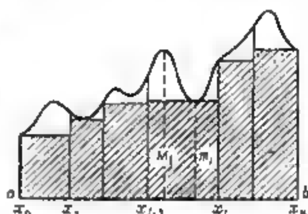


Fig. 1.3

cierta partición del segmento $[a, b]$, entonces los números M_i y m_i en el caso de la función continua $f(x)$ son los valores máximo y mínimo de esta función en el segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición T. Por eso, la suma superior S es igual al área de la figura escalonada rayada (fig. 1.2) que *contiene* el trapecio curvilíneo, y la suma inferior s es igual al área de la figura escalonada rayada (fig. 1.3) que *se contiene* en el trapecio curvilíneo (este trapecio está trazado por una línea gruesa en las figs. 1.2 y 1.3).

Como ya se ha dicho, de la representación geométrica se desprende que la integral es numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo. Por otra parte, es evidente que si la diferencia entre las sumas superiores e inferiores puede hacerse tan pequeña como se desee, entonces, estas sumas pueden ser tan próximas como se quiera al área del trapecio curvilíneo. Por eso, es de esperar que para la integrabilidad de la función es necesario y suficiente que la diferencia entre las sumas superiores e inferiores sea tan pequeña que como se quiera. La demostración estricta se dará en el párrafo siguiente.

2. **Propiedades de las sumas superiores e inferiores.** Demostremos la validez de las siguientes propiedades de las sumas superiores e inferiores:

1°. *Para cualquier partición fijada T y cualquier $\varepsilon > 0$ pueden elegirse los puntos intermedios ξ_i en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ de tal modo que la suma integral $I\{x_i, \xi_i\}$ satisfaga las desigualdades $0 \leqslant S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon$. Pueden elegirse también los puntos ξ_i de tal modo que la suma integral satisfaga las desigualdades $0 \leqslant I\{x_i, \xi_i\} - s < \varepsilon$.*

Sea T una partición fijada del segmento $[a, b]$. Demostremos, por ejemplo, que por $\varepsilon > 0$ dado pueden elegirse los puntos ξ_i de tal modo que se cumpla la desigualdad $0 \leqslant S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon$. Según la definición de la cota exacta M_i, para $\varepsilon > 0$ dado en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ se puede indicar un punto ξ_i tal que

$$0 \leqslant M_i - f(\xi_i) < \varepsilon/(b-a), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Multiplicando estas desigualdades por Δx_i y después sumándolas, obtenemos

$$0 \leqslant S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon.$$

La validez de la propiedad 1° queda establecida.

2°. *Si la partición T' del segmento $[a, b]$ se hace añadiendo nuevos puntos a los puntos de la partición T de este segmento, entonces la suma superior S' de la partición T' no es mayor que la suma superior S de la partición T, y la suma inferior s' de la partición T' no es menor que la suma inferior s de la partición T, o sea,*

$$s \leqslant s', \quad S' \leqslant S.$$

Ya que la partición T' puede obtenerse de la partición T al añadir sucesivamente nuevos puntos a T, es obvio que baste demostrar la propiedad enunciada para el caso cuando a T se le añade un punto. Sea que este punto x' está en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición T del segmento $[a, b]$. Mediante M_i' y M_i'' denotemos las cotas superiores exactas de la función $f(x)$ en los segmentos $[x_{i-1}, x']$ y $[x', x_i]$, mediante $\Delta x_i'$ y $\Delta x_i''$, las longitudes de estos segmentos, y mediante S y S', las sumas superiores de la partición T y la T' obtenida al añadir el punto x' a la partición T. Notemos que $\Delta x_i = \Delta x_i' + \Delta x_i''$. Además, si M_i es cota superior exacta de la función $f(x)$ en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, entonces $M_i \geqslant M_i'$ y $M_i \geqslant M_i''$ puesto que es evidente que *la cota superior exacta de la función en una parte del segmento $[x_{i-1}, x_i]$ no supera la cota superior exacta M_i de esta función en todo el segmento* $[x_{i-1}, x_i]$. Por eso, teniendo en cuenta que las sumas S y S' se diferencian solamente en los sumandos $M_i\Delta x_i$ y $M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i''$, obtenemos

$$S - S' = M_i\Delta x_i - (M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i'') =$$
$$= (M_i - M_i')\,\Delta x_i' + (M_i - M_i'')\,\Delta x_i'' \geqslant 0.$$

o sea, $S' \leqslant S$. La demostración para las sumas inferiores se hace análogamente.

3°. *Sean T' y T'' cualesquiera dos particiones del segmento $[a, b]$. Entonces, la suma inferior de una de estas particiones no supera la suma superior de la otra. A saber, si s', S' y s'', S'' son sumas inferiores y superiores de las particiones T' y T'', entonces respectivamente*

$$s' \leqslant S'', \quad s'' \leqslant S'.$$

Hemos establecido anteriormente que la suma inferior de la partición dada no supera la suma superior de esta partición. Sea T partición del segmento $[a, b]$ obtenida al unir las particiones *) T' y T'', y sean s y S las sumas inferior y superior de la partición T. Ya que la partición T puede obtenerse de la partición T' al añadir a ésta los puntos de la partición T'', entonces, según la propiedad 2° y la propiedad mencionada de las sumas inferior y superior de una misma partición, tenemos

$$s' \leqslant s \leqslant S \leqslant S'.$$

Pero la partición T puede obtenerse también de la partición T'' al añadir a ésta los puntos de la partición T'. Por eso,

$$s'' \leqslant s \leqslant S \leqslant S''.$$

Comparando las desigualdades establecidas anteriormente con las que acabamos de obtener, nos cercioramos de que $s' \leqslant S''$, $s'' \leqslant S'$.

La validez de la propiedad 3° queda establecida.

4°. *El conjunto $\{S\}$ de las sumas superiores de la función dada $f(x)$ para todas las particiones posibles del segmento $[a, b]$ está acotado inferiormente. El conjunto $\{s\}$ de las sumas inferiores está acotado superiormente.*

Esta propiedad se desprende directamente de la propiedad 3°. En efecto, toda suma superior no es menor que cierta suma inferior fijada. Por consiguiente, el conjunto $\{S\}$ de las sumas superiores está acotado inferiormente. Toda suma inferior no es mayor que alguna suma superior, y, por eso, el conjunto $\{s\}$ de las sumas inferiores está acotado superiormente. Mediante $\overline{I}$ denotemos la cota inferior exacta del conjunto $\{S\}$ de las sumas superiores, y mediante $\underline{I}$, la cota superior exacta del conjunto de las sumas inferiores:

$$\overline{I} = \inf \{S\}, \quad \underline{I} = \sup \{s\}.$$

Los números $\overline{I}$ e $\underline{I}$ se denominan respectivamente *integrales superior e inferior de Darboux de la función $f(x)$*. Demostremos que $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

*) Al mismo tiempo, los puntos comunes de las particiones T' y T'' se toman en consideración una vez.

Sea $\underline{I} > \overline{I}$. Entonces, la diferencia $\underline{I} - \overline{I}$ es número positivo que se denotará mediante ε, así que $\underline{I} - \overline{I} = \varepsilon > 0$. De la definición de las cotas exactas $\underline{I}$ e $\overline{I}$ se desprende que existen los números S' y s'' que son respectivamente sumas superior e inferior de algunas particiones T' y T'' del segmento $[a, b]$ tales que $\overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} > S'$ e $\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < s''$. Sustrayendo la segunda desigualdad de la primera y teniendo en cuenta que $\overline{I} - \underline{I} = \varepsilon$, obtenemos $s'' > S'$. Pero esta última desigualdad contradice la propiedad 3° de las sumas superiores e inferiores.

5°. *Sea que la partición T' del segmento $[a, b]$ se obtiene de la partición T al añadir a la última p puntos nuevos y sean s', S' y s, S sumas inferiores y superiores de las particiones T' y T. Entonces, para las diferencias $S - S'$ y $s' - s$* *) *se puede obtener una estimación que depende de la longitud máxima Δ de los segmentos parciales de la partición T, del número p de los puntos agregados y de las cotas superior e inferior exactas M y m de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. A saber,*

$$S - S' \leqslant (M - m)\, p\Delta, \quad s' - s \leqslant (M - m)\, p\Delta.$$

Para cerciorarse de que esta propiedad es válida, baste demostrar las desigualdades aducidas para el caso cuando a la partición T se agrega un punto x'. Sea que este punto está en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición T. Entonces, este segmento se divide en dos segmentos $[x_{i-1}, x']$ y $[x', x_i]$ cuyas longitudes se denotarán mediante $\Delta x_i'$ y $\Delta x_i''$, respectivamente. Sean M_i, M_i' y M_i'' las cotas superiores exactas de la función $f(x)$ en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_{i-1}, x']$ y $[x', x_i]$, respectivamente. Ya que $\Delta x_i = \Delta x_i' + \Delta x_i''$ y las sumas superiores S y S' de las particiones T y T' se diferencian solamente en los sumandos $M_i \Delta x_i$ y $M_i' \Delta x_i' + M_i'' \Delta x_i''$, entonces, $S - S' = M_i (\Delta x_i' + \Delta x_i'') - (M_i' \Delta x_i' + M_i'' \Delta x_i'') = (M_i - M_i')\Delta x_i' + (M_i - M_i'')\Delta x_i''$. Luego, $m \leqslant M_i' \leqslant M_i \leqslant M$ y $m \leqslant M_i'' \leqslant M_i \leqslant M$ **). Por eso, $M_i - M_i' \leqslant M - m$ y $M_i - M_i'' \leqslant M - m$. Por consiguiente, $S - S' \leqslant (M - m)(\Delta x_i' + \Delta x_i'') = (M - m)\Delta x_i$. Ya que $\Delta x_i \leqslant \Delta$, entonces $S - S' \leqslant (M - m)\Delta$. Esta desigualdad coincide con la primera de las desigualdades aducidas en la formulación de la propiedad 5°, si $p = 1$. La demostración para las sumas inferiores se hace análogamente.

---

*) Notemos que, en virtud de la propiedad 2°, estas diferencias son no negativas.

**) Anteriormente, demostrando la propiedad 2°, ya hemos notado que la cota superior exacta de la función en una parte del segmento no supera su cota superior exacta en todo el segmento. Observemos también que la cota inferior exacta de la función en todo el segmento no supera su cota superior exacta en cualquier parte de este segmento.

6°. *Lema de Darboux. Las integrales superior e inferior de Darboux* $\overline{I}$ *e* $\underline{I}$ *de la función* $f(x)$ *por el segmento* $[a, b]$ *son, respectivamente, los límites* *) *de las sumas superiores e inferiores para* $\Delta \to 0$.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos, por ejemplo, que $\lim\limits_{\Delta \to 0} S = \overline{I}$. Para el caso de $M = m$, es decir, cuando $f(x) = c = \text{const}$, el lema es evidente puesto que $S = \overline{I} = \underline{I} = s$. Por eso, tomamos $M > m$. Ya que $\overline{I}$ es la cota inferior exacta del conjunto de las sumas superiores, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado se puede indicar una partición T^* del segmento $[a, b]$ tal que la suma superior S^* de esta partición se diferencie de $\overline{I}$ en menos que $\varepsilon/2$:

$$S^* - \overline{I} < \varepsilon/2. \tag{1.1}$$

Denotemos mediante p el número de los puntos de la partición T^* que se encuentran estrictamente dentro del segmento $[a, b]$. Sea T cualquier partición del segmento $[a, b]$, en el cual la longitud máxima Δ de los segmentos parciales verifica la condición

$$\Delta < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}, \tag{1.2}$$

y sea S la suma superior de esta partición. Añadimos a esta partición los puntos interiores de la partición T^*. Como resultado, obtenemos la partición T' cuya suma superior S' satisface, en virtud de la propiedad 5° y la condición (1.2) para Δ, la desigualdad

$$0 \leqslant S - S' \leqslant (M-m)p\Delta < \varepsilon/2. \tag{1.3}$$

Por otra parte, la partición T' puede considerarse como la partición obtenida después de añadir los puntos interiores de la partición T a T^*. Por eso, en virtud de la propiedad 2°,

$$\overline{I} \leqslant S' \leqslant S^*.$$

De aquí se desprende que $0 \leqslant S' - \overline{I} \leqslant S^* - \overline{I}$, o sea, según la desigualdad (1.1),

$$0 \leqslant S' - \overline{I} < \varepsilon/2.$$

Sumando esta igualdad y la desigualdad (1.3), obtenemos

$$0 \leqslant S - \overline{I} < \varepsilon. \tag{1.4}$$

*) El concepto de límite de las sumas superiores o inferiores se determina de modo completamente análogo al concepto de límite de las sumas integrales. A saber, el número $\overline{I}$ se denomina límite de las sumas superiores S para $\Delta \to 0$ si para cualquier número positivo ε se puede indicar un número positivo δ tal que para $\Delta < \delta$ se cumple la desigualdad $|S - \overline{I}| < \varepsilon$.

De este modo, hemos establecido que, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado se puede indicar un $\delta > 0$ (se puede, por ejemplo, poner $\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$), tal que las sumas superiores S de las particiones T del segmento $[a, b]$ para las cuales la longitud máxima Δ de los segmentos parciales es menor de δ (véase (1.2)), satisfacen la desigualdad (1.4). Pero esto significa que la integral superior $\overline{I}$ de Darboux es el límite de las sumas superiores. Para las sumas inferiores la demostración es análoga. El lema de Darboux queda demostrado.

§ 3. Condición necesaria y suficiente de integrabilidad

Las propiedades establecidas de las sumas superiores e inferiores permiten enunciar la condición necesaria y suficiente de integrabilidad de la función en una forma bien simple. A saber, tiene lugar el siguiente teorema fundamental.

Teorema 1.1. *Para que la función $f(x)$ acotada en el segmento $[a, b]$ sea integrable en este segmento es necesario y suficiente que, para cualquier $\varepsilon > 0$, exista una partición T del segmento $[a, b]$ para la cual*

$$S - s \leqslant \varepsilon.$$

DEMOSTRACION. 1) NECESIDAD. Sea la función $f(x)$ integrable en el segmento $[a, b]$. Mediante I denotemos el límite de las sumas integrales de esta función. Según la definición del límite de las sumas integrales, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un $\delta > 0$ tal que para cualquier partición T, que satisface la condición $\Delta < \delta$, independientemente del modo de elegir los puntos ξ_i en los segmentos parciales de la partición se cumple la desigualdad

$$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon/4. \tag{1.5}$$

Fijemos una partición de este tipo T. Por la propiedad 1° (véase el p. 2 del párrafo anterior), para la partición dada T se puede indicar dos sumas integrales (en otras palabras, en todo segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ pueden elegirse los puntos ξ_i' y ξ_i'') tales que

$$S - I\{x_i, \xi_i'\} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \quad I\{x_i, \xi_i''\} - s \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Notemos que las dos sumas integrales $I\{x_i, \xi_i'\}$ e $I\{x_i, \xi_i''\}$ satisfacen la desigualdad (1.5). De la relación

$$S - s = (S - I\{x_i, \xi_i'\}) + (I\{x_i, \xi_i'\} - I) + \\ + (I - I\{x_i, \xi_i''\}) + (I\{x_i, \xi_i''\} - s),$$

la desigualdad (1.5) y las desigualdades $S - I\{x_i, \xi_i'\} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ y $I\{x_i, \xi_i''\} - s \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ se desprende que

$$S - s < \varepsilon$$

La necesidad de las condiciones del teorema queda demostrada.

2) SUFICIENCIA. Ya que para cualquier partición T son válidas las desigualdades $s \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, según la condición del teorema, se puede indicar una partición tal que $S - s \leqslant \varepsilon$, entonces $0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant \varepsilon$. Debido a que ε es arbitrario, obtenemos $\underline{I} = \overline{I}$.

Denotemos el valor común de los números $\underline{I}$ e $\overline{I}$ mediante I y demostremos que el número I es el límite de las sumas integrales de la función $f(x)$. En efecto, en virtud del lema de Darboux (véase el p. 2 del § 2), el número I es límite común de las sumas superiores e inferiores para $\Delta \to 0$. Por eso, para cualquier ε, se puede indicar un δ tal que para $\Delta < \delta$ se cumplen las desigualdades $I - s < \varepsilon/2$ y $S - I < \varepsilon/2$, o sea, para $\Delta < \delta$, $S - s < \varepsilon$, con tal que $s \leqslant I \leqslant \leqslant S$. Toda suma integral $I\{x_i, \xi_i\}$ de la partición dada T se comprende entre la suma superior y la inferior $s \leqslant I\{x_i, \xi_i\} \leqslant S$. De este modo, para $\Delta < \delta$ ambas magnitudes I e $I\{x_i, \xi_i\}$ se comprenden entre los números S y s, la diferencia entre los cuales es menor de ε. De aquí se desprende que para $\Delta < \delta$

$$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, el número I es el límite de las sumas integrales. El teorema queda demostrado.

A continuación necesitaremos forma un poco distinta de anotación de la condición necesaria y suficiente de integrabilidad. Sean M_i y m_i cotas exactas de los valores de la función $f(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$. El número

$$\omega_i = M_i - m_i$$

se denomina *oscilación de la función* $f(x)$ en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$. Notemos que, como $M_i \geqslant m_i$, la oscilación ω_i es número no negativo. Vamos a escribir ahora la diferencia $S - s$ en la forma siguiente:

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

Puesto que $\omega_i \geqslant 0$ y $\Delta x_i > 0$, entonces todo sumando en la última suma es no negativo.

Se puede enunciar la condición necesaria y suficiente de integrabilidad de la función en la forma siguiente.

Para que la función $f(x)$ sea integrable en el segmento $[a, b]$, es necesario y suficiente que, para cualquier $\varepsilon > 0$, exista una partición T del segmento $[a, b]$ para la cual

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leqslant \varepsilon.$$

§ 4. Algunas clases de funciones integrables

En el presente párrafo demostremos la integrabilidad de funciones continuas en un segmento, algunas funciones discontinuas y funciones monótonas. Para demostrar la integrabilidad de funciones continuas necesitaremos una propiedad importante de funciones continuas en un segmento que se establece en el punto siguiente.

1. Propiedad de la continuidad uniforme de una función.

Definición. La función $f(x)$ se denomina uniformemente continua sobre el conjunto $\{x\}$) si para cualquier número positivo ε se puede indicar un δ positivo (dependiente sólo de ε) tal que para cualesquiera dos puntos x' y x'' del conjunto $\{x\}$ que satisfacen la condición $|x''-x'| < \delta$, se cumple la desigualdad $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon$.*

OBSERVACION. En esta definición lo principal es que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ *que garantiza el cumplimiento de la desigualdad $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon$ para todos los x' y x'' del conjunto $\{x\}$ a la vez, si se observa la única condición $|x''-x'| < \delta$.*

Para explicar la propiedad de la continuidad uniforme, consideremos los siguientes ejemplos:

1) La función $f(x) = \sqrt{x}$ *es uniformemente continua* en la semirrecta $x \geqslant 1$. En efecto, según el teorema de Lagrange tenemos, para cualesquiera $x' \geqslant 1$ y $x'' \geqslant 1$.

$$|f(x'')-f(x')| = |f'(\xi)|\,|x''-x'| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x''-x'| < \frac{1}{2}|x''-x'|$$

(la última desigualdad se desprende del hecho de que ξ se comprende entre x' y x'', y por eso, $\xi > 1$). Por consiguiente, si según el $\varepsilon > 0$ dado escogemos cualquier δ que satisface la condición $0 < \delta \leqslant 2\varepsilon$, entonces, para $|x''-x'| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon$, es decir, sobre el conjunto $x \geqslant 1$ la función $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua.

2) La función $f(x) = x^2$ *no es uniformemente continua sobre el conjunto* $x \geqslant 1$. Es suficiente demostrar que, para cierto $\varepsilon > 0$, no se puede escoger $\delta > 0$ que garantiza el cumplimiento de la desigualdad $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon$ para todos los $x' \geqslant 1$ y $x'' \geqslant 1$ si la única condición es $|x''-x'| < \delta$. Demostraremos que en realidad, incluso para cualquier $\varepsilon > 0$, no se puede escoger dicho δ. Fijemos un $\varepsilon > 0$ y consideremos cualquier δ positivo. Escojamos $x' > \frac{\varepsilon}{\delta}$, $x'' = x' + \frac{\delta}{2}$. Entonces, $|x''-x'| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Empleando el teorema de Lagrange, obtenemos

$$|f(x'')-f(x')| = 2\xi\,|x''-x'| = \xi\delta.$$

*) En este caso se supone que el conjunto $\{x\}$ es denso en sí (véase la parte final del § 3, el cap. 2 del tomo 1).

Ya que ξ se comprende entre x' y x'', entonces $\xi > \frac{\varepsilon}{\delta}$, y, por eso, de la última desigualdad se desprende la desigualdad

$$| f(x'') - f(x') | > \varepsilon$$

aunque $| x'' - x' | < \delta$. De este modo, la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua sobre el conjunto $x \geqslant 1$.

3) La función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ *no es uniformemente continua* sobre el intervalo (0, 1). Demostremos que para cualquier ε que satisface las condiciones $0 < \varepsilon < 2$ no se puede indicar $\delta > 0$ que garantiza el cumplimiento de la desigualdad $| f(x'') - f(x') | < \varepsilon < 2$ para todos los x' y x'' del intervalo (0, 1) si la única condición es $| x'' - x' | < \delta$. Para cerciorarse de esto, es suficiente tomar $x' = \frac{2}{(4k+3)\pi}$ y $x'' = \frac{1}{(4k+1)\pi}$ y, para cualquier $\delta > 0$, escoger k tan grande que $| x'' - x' | < \delta$. Para los puntos indicados x' y x'' y para cualquier k la diferencia

$$| f(x'') - f(x') | = \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x''} - \operatorname{sen} \frac{1}{x'} \right| = 2 > \varepsilon.$$

Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 1.2 (de la continuidad uniforme). *Una función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, es uniformemente continua en este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, no es uniformemente continua en este segmento. Entonces, para *cierto* $\varepsilon > 0$, no se cumplen las condiciones enunciadas en la definición de la continuidad uniforme. Esto significa que para dicho $\varepsilon > 0$ y *cualquier* número positivo δ, en el segmento $[a, b]$ existen puntos x' y x'' tales que $| x'' - x' | < \delta$ pero $| f(x'') - f(x') | \geqslant \varepsilon$. Por eso, para todo $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, existen puntos x'_n y x''_n del segmento $[a, b]$ tales que $| x''_n - x'_n | < 1/n$, pero $| f(x''_n) - f(x'_n) | \geqslant \varepsilon$. Ya que $\{x'_n\}$ es sucesión de puntos del segmento $[a, b]$, entonces según el teorema de Bolzano — Weierstrass, de ella se puede separar una subsucesión $\{x'_{k_n}\}$ convergente a cierto punto c de este segmento (véase la observación 2 del p. 4, § 4, cap. 3, tomo 1). Evidentemente, la subsucesión $\{x''_{k_n}\}$ de la sucesión $\{x''_n\}$ también converge a c. Ya que en el punto c la función $f(x)$ es continua, entonces los límites de las sucesiones $\{f(x'_{k_n})\}$ y $\{f(x''_{k_n})\}$ son iguales a $f(c)$, y, por eso, la sucesión $\{f(x''_{k_n}) - f(x'_{k_n})\}$ es infinitesimal. Pero esto es imposible puesto que todos los elementos $f(x''_{k_n}) - f(x'_{k_n})$ de dicha sucesión satisfacen la desigualdad $| f(x''_{k_n}) - f(x'_{k_n}) | \geqslant \varepsilon$. De este modo, la suposición de que la

función continua en el segmento $[a, b]$ no es uniformemente continua conlleva la contradicción. El teorema queda demostrado.

*Corolario. Sea la función $f(x)$ continua en el segmento $[a, b]$. Entonces, para cualquier número positivo ε se puede indicar un $\delta > 0$ tal que en todo segmento parcial $[c, d]$ perteneciente al segmento $[a, b]$, cuya longitud $d - c$ es menor de δ, la oscilación ω *) de la función $f(x)$ es menor de ε.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema que acabamos de demostrar, la función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, es uniformemente continua en este segmento. Por eso, para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede indicar un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera x' y x'' del segmento $[a, b]$ que satisfacen la condición $|x'' - x'| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Demostremos que en todo segmento parcial $[c, d]$ perteneciente al segmento $[a, b]$ y cuya longitud $d - c$ es menor de dicho δ, la oscilación ω de la función $f(x)$ es menor de ε. En efecto, ya que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[c, d]$, en este segmento se puede indicar puntos x' y x'' tales que $f(x') = m$, y $f(x'') = M$, donde m y M son cotas inferior y superior exactas de $f(x)$ en el segmento $[c, d]$ (véase el teorema 8.8). Ya que $|x'' - x'| < \delta$ (puesto que la longitud del segmento $[c, d]$ es menor que δ), entonces $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Pero $f(x'') - f(x') = M - m = \omega$. Por eso, $\omega < \varepsilon$.

OBSERVACIÓN. Un conjunto $\{x\}$ de puntos de la recta numérica se denomina *cerrado* si contiene todos sus puntos límite **). Es válida la siguiente afirmación. *Una función $f(x)$, continua sobre un conjunto cerrado acotado* ***) *$\{x\}$, es uniformemente continua sobre este conjunto.* La demostración de esta afirmación es análoga a la del teorema 1.2.

2. Lema de Heine — Borel. Otra demostración del teorema de la continuidad uniforme. Un punto x del conjunto $\{x\}$ *se denomina punto interior* de este conjunto si x pertenece a un intervalo, en el cual todos los puntos pertenecen al conjunto $\{x\}$. El conjunto $\{x\}$ se denomina *abierto* si todos los puntos de este conjunto son interiores.

Se dice que *el conjunto dado $\{x\}$ está cubierto por el sistema Σ de conjuntos abiertos* ****) si todo punto x de este conjunto pertenece, por lo menos, a un conjunto de Σ. Demostremos el lema siguiente.

Lema de Heine — Borel *****). *Si el segmento $[a, b]$ está cubierto por un sistema infinito Σ de conjuntos abiertos, entonces de este sistema se puede separar un subsistema $\overline{\Sigma}$ de conjuntos que también cubre el segmento $[a, b]$.*

---

*) Recordemos que se llama *oscilación* ω de la función $f(x)$ en el segmento $[c, d]$ la diferencia $M - m$ entre las cotas superior exacta e inferior exacta de la función $f(x)$ en este segmento.

**) La definición del punto límite de un conjunto se da en el p. 6 del § 4, cap. 3, tomo 1.

***) La definición del conjunto acotado se da en el p. 6 del § 4, el cap. 3, tomo 1.

****) Si el conjunto $\{x\}$ consiste sólo de un punto y el sistema Σ comprende solamente un conjunto abierto, diremos que este conjunto *cubre* el punto indicado.

*****) E. Heine, matemático alemán (1821—1881). Emile Borel, matemático francés (1871—1956).

DEMOSTRACIÓN *). Sea $\{x\}$ conjunto de tales puntos del segmento $[a, b]$ que si x pertenece a este conjunto, entonces el segmento $[a, x]$ se cubre por un subsistema finito Σ' del conjunto de sistemas Σ. Demostremos que el conjunto $\{x\}$ coincide con el segmento $[a, b]$. Ya que el punto a está cubierto por un conjunto del sistema Σ y este conjunto es abierto, entonces él cubre también un segmento $[a, x]$ todos los puntos del cual, según lo dicho anteriormente, pertenecen al conjunto $\{x\}$. El conjunto $\{x\}$ es evidentemente acotado. Sea $\bar{x} = \sup \{x\}$. Cerciorémonos de que $\bar{x}$ pertenece al conjunto $\{x\}$ y $\bar{x} = b$. En efecto, $\bar{x}$ está cubierto por un conjunto del sistema Σ y, por consiguiente, todos los puntos de cierto intervalo $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ están cubiertos por el mismo conjunto. Ya que $\bar{x} = \sup \{x\}$, entonces existen puntos del conjunto $\{x\}$ tan próximos a $\bar{x}$ como se quiera, y, por eso, existe un punto x' de este conjunto que pertenece al intervalo $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$. De la definición del conjunto $\{x\}$ se desprende que el segmento $[a, x']$ se cubre por un subsistema finito Σ' de conjuntos del sistema Σ. Uniendo a Σ' el conjunto que cubre el punto $\bar{x}$, obtenemos un subsistema finito $\bar{\Sigma}$ de conjuntos del sistema Σ que cubre el segmento $[a, \bar{x}]$. Por consiguiente, $\bar{x}$ pertenece a $\{x\}$. Si admitiéramos que $\bar{x} < b$, entonces el subsistema $\bar{\Sigma}$ cubriría todos los puntos de un segmento $[a, x'']$, donde $\bar{x} < x'' < \bar{x} + \varepsilon$, y, por eso, el punto x'' pertenecería al conjunto $\{x\}$. Pero esto es imposible porque $\bar{x}$ es la cota superior exacta del conjunto $\{x\}$. De este modo, el conjunto $\{x\}$ coincide con el segmento $[a, b]$. El lema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Se puede generalizar el lema de Heine-Borel del modo siguiente. *Si un conjunto acotado cerrado* **) $\{x\}$ *está cubierto por un sistema infinito* Σ *de conjuntos abiertos, entonces de este sistema se puede separar un subsistema finito* $\bar{\Sigma}$ *de conjuntos que cubre también el conjunto* $\{x\}$. Aduzcamos ahora otra demostración del teorema 1.2.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LA CONTINUIDAD UNIFORME. Prolonguemos $f(x)$ sobre toda la recta haciéndola igual a $f(b)$ para $x > b$ e igual a $f(a)$ para $x < a$. Ya que $f(x)$ es continua en todo punto del segmento $[a, b]$, entonces, para cualquier punto x de este segmento y cualquier $\varepsilon > 0$ dado, se puede indicar un $\delta' > 0$ dependiente, hablando en general, de x y tal que para todos los puntos x' que satisfacen la condición $|x' - x| < \delta'$ se cumple la desigualdad $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$. De este modo, el segmento $[a, b]$ está cubierto por el sistema infinito Σ de los intervalos $(x - \delta'/2, x + \delta'/2)$ ***) del cual se puede separar, en virtud del lema de Heine — Borel, un subsistema finito $\bar{\Sigma}$ de intervalos que también cubre el segmento $[a, b]$. Sea δ valor mínimo de $\delta'/2$ para este subsistema finito $\bar{\Sigma}$ de intervalos. Sean ahora x' y x'' cualesquiera dos puntos del segmento $[a, b]$ que satisfacen la condición $|x'' - x'| < \delta$, y sea x centro del intervalo $(x - \delta'/2, x + \delta'/2)$, $\delta \leq \delta'/2$, del sistema que cubre el punto x'. Puesto que $|x' - x| < (\delta'/2) < \delta'$ y $|x'' - x| < \delta'$, se tiene $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$ y $|f(x'') - f(x)| < \varepsilon/2$, y, por eso,

$$|f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - f(x)| + |f(x') - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

*) Esta demostración del lema de Heine — Borel pertenece a Henri Lebesgue, matemático francés (1875—1941). Señalemos que Lebesgue dio y argumentó un modo más generalizado de abordar el problema de integración que el expuesto en el presente capítulo. El concepto correspondiente de integral se denomina integral de Lebesgue.

**) Véase la observación del punto anterior.

***) Tomamos los intervalos $(x - \delta'/2, x + \delta'/2)$ en vez de $(x - \delta', x + \delta')$ para razonar ulteriormente con más comodidad.

Así pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado hemos indicado un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera puntos x' y x'' del segmento $[a, b]$ que satisfacen la condición $|x'' - x'| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Por consiguiente, la función $f(x)$ es uniformemente continua en el segmento $[a, b]$. El teorema queda demostrado.

3. **Integrabilidad de las funciones continuas.** Demostremos el siguiente teorema fundamental.

Teorema 1.3. *La función $f(x)$ continua en el segmento $[a, b]$ es integrable en este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado cualquier $\varepsilon > 0$. En virtud de la continuidad uniforme de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, para el número positivo $\varepsilon/(b-a)$ se puede indicar un $\delta > 0$ tal que para la partición T del segmento $[a, b]$ en segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$, cuyas longitudes son menores de δ, la oscilación ω_i de la función en todo segmento parcial será menor de $\varepsilon/(b-a)$ (véase el corolario del teorema 1.2). Por eso, para estas particiones T

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Por consiguiente, para la función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, se cumplen las condiciones suficientes de integrabilidad.

4. **Integrabilidad de algunas funciones discontinuas.** Se dice que el punto x está cubierto por un intervalo si este punto pertenece a dicho intervalo. Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Si la función $f(x)$ está definida y acotada en el segmento $[a, b]$ y si para cualquier número positivo ε se puede indicar un número finito de intervalos que cubren todos los puntos de discontinuidad de esta función y cuya suma total de longitudes es menor de ε, entonces $f(x)$ es integrable en el segmento $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado cualquier $\varepsilon > 0$. Vamos a cubrir los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ por un número finito de intervalos cuya suma total de longitudes es menor de $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$, donde M y m son cotas superior e inferior exactas de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ (el caso de $M = m$ puede excluirse puesto que entonces $f(x) \equiv c \equiv \text{const}$). Los puntos del segmento no pertenecientes a dichos intervalos forman un conjunto compuesto de un número finito de segmentos no intersecantes. En cada uno de ellos la función $f(x)$ es continua y, por eso, uniformemente continua. Vamos a partir todo segmento de este tipo de tal modo que, en cualquier segmento parcial de la partición, la oscilación ω_i de la función $f(x)$ sea menor de $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Uniendo estas particiones y los intervalos que cubren los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ obtenemos la partición T de todo el segmento $[a, b]$. Para esta partición, los sumandos

de la suma $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ (igual a $S-s$) se dividen en dos grupos $\sum' \omega_i \Delta x_i$ y $\sum'' \omega_i \Delta x_i$ con tal que el primer grupo comprende todos los sumandos correspondientes a las partes de la partición T formadas por los intervalos que cubren los puntos de discontinuidad, y el segundo grupo, los demás sumandos. Ya que para los sumandos del primer grupo las oscilaciones $\omega_i = M_i - m_i$ satisfacen la desigualdad $\omega_i \leqslant M - m$, entonces

$$\sum' \omega_i \Delta x_i \leqslant (M-m) \sum' \Delta x_i < (M-m) \frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para los sumandos del segundo grupo, $\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Por eso,

$$\sum'' \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De este modo,

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Así pues, para la función $f(x)$ dada en la condición del teorema, se cumplen las condiciones suficientes de integrabilidad. El teorema queda demostrado.

*Corolario. La función $f(x)$, acotada en el segmento $[a, b]$ y que tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad, es integrable en este segmento *). En particular, una función continua a trozos en el segmento dado es integrable en este segmento.*

OBSERVACION. Es obvio que si la función $f(x)$ es integrable en el segmento $[a, b]$ y la función $g(x)$ se diferencia de la función $f(x)$ sólo en un número finito de puntos, entonces la función $g(x)$ es también integrable en el segmento $[a, b]$ con tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Consideremos un ejemplo de la función integrable que tiene un número *infinito* de puntos de discontinuidad. Sea que en el segmento $[0, 1]$ está dada la función $f(x)$ (fig. 1 4)

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ en los semisegmentos } \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right], & n = 1, 2, \ldots, \\ -1 \text{ en los semisegmentos } \left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n}\right], & n = 1, 2, \ldots, \\ \text{en el punto } x = 0. \end{cases}$$

*) Si p es número de puntos de discontinuidad, es suficiente cubrir todo punto de discontinuidad por el intervalo de longitud $\varepsilon/2p$.

Dicha función tiene discontinuidades de primera especie en *todos* los puntos $x_n = 1/n$, $n = 2, 3, \ldots$. Fijemos cualquier $\varepsilon > 0$. Vamos a cubrir el punto $x = 0$ (en cualquier entorno de este punto se encuentra un número finito de puntos de discontinuidad de la función) por el intervalo $(-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$. Fuera de este intervalo se halla solamente un número finito p*) de puntos de discontinuidad de la función, cada uno de los cuales se cubre por un intervalo de longitud menor de $\frac{\varepsilon}{2p}$. La suma de las longitudes de los intervalos que cubren todos los puntos de discontinuidad de la función considerada es menor de $\frac{\varepsilon}{2} + p\frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$. Por consiguiente, la función $f(x)$ es integrable en el segmento $[0, 1]$.

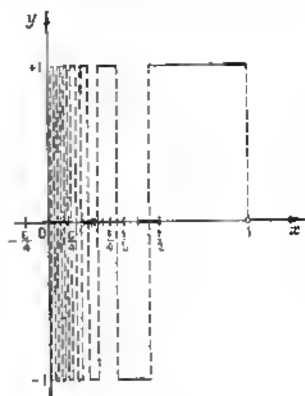


Fig. 1.4

5. Integrabilidad de las funciones acotadas monótonas.

Teorema 1.5. Una función $f(x)$ monótona en el segmento $[a, b]$, es integrable en este segmento **).

DEMOSTRACIÓN. Para la precisión, demostremos el teorema para la función $f(x)$ no decreciente en el segmento $[a, b]$. Prefijemos un número positivo arbitrario ε y dividamos el segmento $[a, b]$ en partes iguales cuyas longitudes son menores de $\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ (el caso de $f(a) = f(b)$ puede excluirse, puesto que entonces $f(x) = \text{const}$). Estimemos para esta partición la diferencia $S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$. Tenemos

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

Pero, para la función decreciente $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = f(b) - f(a)$ por lo que $S - s < \varepsilon$. El teorema queda demostrado.

*) Naturalmente, el número p depende de ε.

**) Notemos que si la función es monótona en el segmento $[a, b]$, sus valores se comprenden entre $f(a)$ y $f(b)$. Por eso, la función monótona definida sobre el segmento $[a, b]$ está acotada en este segmento.

§ 5. Propiedades fundamentales de la integral definida

Demostremos la validez de las siguientes propiedades de la integral definida:

1°. Consideramos que

$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{1.6}$$

Notemos que la fórmula (1.6) debe considerarse como un acuerdo. Es necesario aceptarla como la extensión lógica del concepto de la integral definida para el segmento de longitud nula.

2°. Consideramos que para $a < b$

$$\int_{b}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{1.7}$$

Esta fórmula debe considerarse también como un acuerdo. Es la generalización lógica del concepto de la integral para el caso cuando, para $a < b$, el segmento $[a, b]$ es recorrido en la dirección de b a a (en este caso, en la suma integral todas las diferencias $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tienen signo negativo).

3°. Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ integrables en el segmento $[a, b]$. Entonces, las funciones $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ y $f(x)\,g(x)$ lo son también en este segmento con tal que

$$\int_{a}^{b} [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx. \tag{1.8}$$

Demostremos primeramente la integrabilidad de la función $f(x) \pm g(x)$ y la validez de la fórmula (1.8). Para cualquier partición del segmento $[a, b]$ y cualquier modo de elección de los puntos ξ_i para las sumas integrales es válida la relación

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

y, por eso, de la existencia del límite del miembro derecho se desprende la existencia del límite del miembro izquierdo. Por consiguiente, la función $f(x) \pm g(x)$ es integrable y tiene lugar la fórmula (1.8).

Demostremos ahora que el producto de funciones integrables es función integrable. Ya que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en el segmento $[a, b]$, entonces son acotadas también en este segmento (véase la afirmación en el p. 1 del § 1), así que $|f(x)| \leq A$ y $|g(x)| \leq B$. Consideremos cualquier partición dada T del

segmento $[a, b]$. Sean x' y x'' puntos arbitrarios del segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$. Tenemos la identidad

$$f(x'')\,g(x'') - f(x')\,g(x') = [f(x'') - f(x')]\,g(x'') + [g(x'') - g(x')]\,f(x').$$

Ya que

$$|f(x'')\,g(x'') - f(x')\,g(x')| \leqslant \omega_i, \quad |f(x'') - f(x')| \leqslant \overline{\omega}_i, \quad |g(x'') - g(x')| \leqslant \overline{\overline{\omega}}_i,$$

donde ω_i, $\overline{\omega}_i$, $\overline{\overline{\omega}}_i$ son oscilaciones de las funciones $f(x)\,g(x)$, $f(x)$, $g(x)$, respectivamente, en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, entonces, según la identidad mencionada *),

$$\omega_i \leqslant B\overline{\omega}_i + A\overline{\overline{\omega}}_i.$$

Por eso,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leqslant B \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i \Delta x_i + A \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{\omega}}_i \Delta x_i.$$

Puesto que $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en el segmento $[a, b]$, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado se puede indicar una partición T de este segmento, tal que

$\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2B}$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\overline{\omega}}_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2A}$. Por consiguiente, para esta partición,

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < B\frac{\varepsilon}{2B} + A\frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon.$$

Por eso, el producto de funciones integrables es función integrable.

4°. Si la función $f(x)$ es integrable en el segmento $[a, b]$, entonces la función $cf(x)$ ($c = \text{const}$) es integrable en este segmento, con tal que

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1.9)$$

En efecto, las sumas integrales de las funciones $f(x)$ y $cf(x)$ se diferencian en el factor constante c. Por eso, la función $cf(x)$ es integrable y es válida la fórmula (1.9).

5°. Sea la función $f(x)$ integrable en el segmento $[a, b]$. Entonces, esta función es integrable en cualquier segmento $[c, d]$ comprendido en el segmento $[a, b]$.

*) En esta identidad se puede escoger los puntos x' y x'' de tal modo que el miembro izquierdo se diferencie de ω_i en una magnitud tan pequeña como se desea.

Puesto que la función $f(x)$ es integrable en el segmento $[a, b]$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una partición T del segmento $[a, b]$ tal que $S - s < \varepsilon$ (véase el teorema 1.1). Añadimos los puntos c y d a los puntos de la partición T. En virtud de la propiedad 2° de las sumas superiores e inferiores (véase el p. 2 del § 2), para la partición obtenida T^* es tanto más válida la desigualdad $S - s < \varepsilon$. La partición T^* del segmento $[a, b]$ engendra la partición T' del segmento $[c, d]$. Si $\overline{S}$ y $\overline{s}$ son sumas superior e inferior de la partición T', entonces $\overline{S} - \overline{s} \leqslant S - s$, puesto que en la expresión $\overline{S} - \overline{s} = \sum \omega_i \Delta x_i$ todo sumando no negativo $\omega_i \Delta x_i$ será también sumando en la expresión para $S - s$. Por consiguiente, $\overline{S} - \overline{s} < \varepsilon$, y, peor eso, la función $f(x)$ es integrable en el segmento $[c, d]$.

6°. Sea la función $f(x)$ integrable en los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$. Entonces, esta función es integrable en el segmento $[a, b]$ con tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (1.10)$$

En primer lugar, consideremos el caso de $a < c < b$. Ya que la función $f(x)$ es integrable en los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces existen tales particiones de estos segmentos que la diferencia $S - s$ es menor de $\varepsilon/2$, para cada una de las particiones. Uniéndolas, obtenemos la partición del segmento $[a, b]$ para la cual la diferencia $S - s$ será menor de ε. Por consiguiente, la función $f(x)$ es integrable en $[a, b]$. Incluiremos el punto c en el número de los puntos que dividen el segmento $[a, b]$ para toda partición del segmento. Entonces, la suma integral para $f(x)$ en $[a, b]$ es igual a la suma de las sumas integrales para esta función en $[a, c]$ y $[c, b]$. Pasando al límite, obtenemos la fórmula (1.10).

Si el punto c se halla fuera del segmento $[a, b]$, entonces el segmento $[a, b]$ es parte del segmento $[a, c]$ (o de $[c, b]$), y por eso, en virtud de la propiedad 5°, la función $f(x)$ es integrable en $[a, b]$. Consideremos el caso de $a < b < c$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

De aquí, empleando la propiedad 2° y la fórmula (1.7), obtenemos de nuevo la relación (1.10). Es fácil convencerse de la validez de esta relación también para $c < a < b$.

§ 6. Estimaciones de integrales. Fórmulas del valor medio

1. Estimaciones de integrales. En este punto obtenemos algunas estimaciones para las integrales definidas cuyas funciones subintegrales verifican unas u otras condiciones.

1°. *Sea que la función $f(x)$, integrable en el segmento $[a, b]$, es no negativa en este segmento. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

En efecto, toda suma integral de esta función es no negativa, y, por eso, el limite $I = \int_a^b f(x)\,dx$ de las sumas integrales es también no negativo*).

OBSERVACION 1. *Si $f(x)$ es integrable en el segmento $[a, b]$ y $f(x) \geqslant m$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant m(b-a).$$

En efecto, la función $f(x)-m \geqslant 0$ y es integrable en el segmento $[a, b]$. Por eso, $\int_a^b [f(x)-m]\,dx \geqslant 0$. De aquí,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m(b-a)$$

(véase la propiedad 3° y el ejemplo del § 1).

2°. *Si la función $f(x)$ es continua, no negativa y no es idénticamente igual a cero en el segmento $[a, b]$, entonces,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant c > 0.$$

En efecto, debido a que la función $f(x)$ es no negativa y no es idénticamente igual a cero, en el segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que $f(\xi) = 2k > 0$. Entonces, según el teorema de la estabilidad del signo de una función continua, se puede hallar un segmento $[p, q]$ que comprende el punto ξ y entre los límites del cual los valores de la función $f(x)$ no serán menor que un número $k > 0$. Por eso, con-

*) Admitimos que el limite I de las sumas integrales es negativo. Entonces, según la definición del limite I, para el número $\varepsilon = |I|$ existe una suma integral $I\{x_i, \xi_i\}$, para la cual $|I\{x_i, \xi_i\} - I| < |I|$. De esta desigualdad se desprende que $I\{x_i, \xi_i\} < 0$, mientras acabamos de cerciorarnos de que toda suma integral es no negativa. Por consiguiente, el limite I es no negativo.

forme a la observación que acabamos de formular,

$$\int_p^q f(x)\,dx \geqslant k(q-p) > 0.$$

Según la propiedad 6° de las integrales definidas,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx.$$

Por eso, ya que $f(x) \geqslant 0$ y $\int_p^q f(x)\,dx \geqslant c > 0$, donde $c = k(q-p)$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant c > 0.$$

3°. *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en el segmento $[a, b]$ y $f(x) \geqslant g(x)$ sobre todo el segmento, entonces,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

En efecto, la función $f(x) - g(x) \geqslant 0$ y es integrable en el segmento $[a, b]$. De aquí, en virtud de la propiedad 1°, se desprende la validez de dicha estimación.

OBSERVACION 2. *Si la función $f(x)$ es integrable en el segmento $[a, b]$, entonces, la función $|f(x)|$ es también integrable en este segmento, y, además,*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Demostremos primero la integrabilidad del módulo $|f(x)|$ de la función integrable $f(x)$. Mediante M_i y m_i denotemos las cotas exactas de $f(x)$ en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, y mediante M_i' y m_i', las cotas exactas de $|f(x)|$ en el mismo segmento. Es fácil cerciorarse de que $M_i' - m_i' \leqslant M_i - m_i$ (basta considerar tres casos posibles: 1) M_i y m_i son no negativos, 2) M_i y m_i son no positivos, 3) $M_i > 0$, $m_i \leqslant 0$). De la desigualdad obtenida se desprende que $S' - s' \leqslant S - s$. De este modo, si para una partición $S - s < \varepsilon$, entonces para esta partición $S' - s' < \varepsilon$, es decir, para $|f(x)|$ se cumple la condición suficiente de integrabilidad *).

---

*) Hablando en general, de la integrabilidad de la función $|f(x)|$ no se desprende la integrabilidad de $f(x)$. Por ejemplo, la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \text{ racionales,} \\ -1 & \text{para } x \text{ irracionales,} \end{cases}$ no es integrable en el segmento $[0, 1]$ mientras $|f(x)| \equiv 1$ es función integrable en este segmento.

Demostremos ahora la estimación que nos interesa. Ya que $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, entonces

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$ pero esto significa que $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

4°. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ integrables en el segmento $[a, b]$ y sea $g(x) \geqslant 0$. Entonces, si M y m son cotas exactas de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, entonces,*

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (1.11)$$

La validez de (1.11) se desprende de que para todos los x del segmento $[a, b]$ son válidas las desigualdades $mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x)$ (véase la estimación 3° del presente punto y la propiedad 4° del § 5).

OBSERVACION 3. En el complemento 1 del presente capítulo obtendremos algunas desigualdades importantes para las sumas y las integrales definidas.

2. Primera fórmula del valor medio. *Sea la función $f(x)$ integrable en el segmento $[a, b]$ y sean m y M cotas exactas de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. Entonces, existe un número μ que satisface las desigualdades $m \leqslant \mu \leqslant M$ y tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a). \qquad (1.12)$$

En efecto, tomando $g(x) = 1$ y teniendo en cuenta que $\int_a^b 1\cdot dx = b-a$ (véase el ejemplo en el p. 1 del § 1), obtenemos, de (1.11),

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Denotando mediante μ el número $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, obtenemos la fórmula (1.12).

Si la función $f(x)$ es *continua* en el segmento $[a, b]$, entonces existen puntos p y q de este segmento tales que $f(p) = m$ y $f(q) = M$ (véase el teorema 8.8), y, por eso, en virtud del teorema 8.6, en el segmento $[p, q]$, y, por tanto, en $[a, b]$ existe un punto ξ tal que

$f(\xi) = \mu$. En este caso, la fórmula (1.12) toma la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{1.13}$$

Esta fórmula se denomina *primera fórmula de valor medio.*

3. Primera fórmula del valor medio en forma generalizada. Demostremos la siguiente afirmación. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ integrables en el segmento $[a, b]$, y sean m y M cotas exactas de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. Sea, además, que la función $g(x) \geqslant 0$ (ó $g(x) \leqslant 0$) en todo el segmento $[a, b]$. Entonces, existe un número μ que satisface las desigualdades $m \leqslant \mu \leqslant M$ y tal que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.14}$$

En particular, si $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces en este segmento existe un número ξ tal que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.15}$$

La fórmula (1.15) se denomina *primera fórmula del valor medio en forma generalizada.*

Demostremos la validez de la fórmula (1.14). Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces, en virtud de las desigualdades (1.11), $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ y, por eso, en calidad de μ podemos tomar cualquier número. Si $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, entonces, al dividir todos los miembros de las desigualdades (1.11) por $\int_a^b g(x)\,dx$, obtenemos

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Poniendo μ igual a $\dfrac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$, obtenemos la fórmula (1.14)

Si $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces, cualquiera que sea el número μ comprendido entre m y M, en este segmento existe un punto ξ tal que $f(\xi) = \mu$, es decir, la fórmula (1.14) se transforma en la fórmula (1.15).

OBSERVACION 4. Si la función $f(x)$ no es continua, entonces, hablando en general, la fórmula (1.15), es inválida. En efecto, sea, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, \text{ si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\text{y } g(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, \text{ si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Entonces, como es fácil cerciorarse, el número μ en la fórmula (1.14) es igual a 2/3. De este modo, para cualquier ξ del segmento $[0, 1]$ $f(\xi) \neq \mu$.

4. **Segunda fórmula del valor medio.** Es válida la siguiente afirmación. *Si en el segmento $[a, b]$ la función $g(x)$ es monótona y $f(x)$ es integrable, entonces en este segmento existe un punto ξ tal que*

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = g(a) \int_a^\xi f(x) \, dx + g(b) \int_\xi^b f(x) \, dx. \qquad (1.16)$$

La fórmula (1.16) se denomina *segunda fórmula del valor medio* o *fórmula de Bonnet* *). La afirmación enunciada se demuestra en el complemento 2 del presente capítulo.

§ 7. Existencia de la primitiva de una función continua. Reglas fundamentales de integración

1. **Existencia de la primitiva de una función continua.** Antes de demostrar el teorema de la existencia de la primitiva de una función continua, introduzcamos el concepto de *integral con límite superior variable.*

Sea la función $f(x)$ integrable en cualquier segmento que se contiene en el intervalo (a, b), y sea c un punto fijado de este intervalo. Entonces, cualquiera que sea el número x del intervalo (a, b), la función $f(x)$ es integrable en el segmento $[c, x]$. Por eso, en el intervalo

*) Bonnet, matemático francés, (1819—1892).

(a, b) está definida la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt^{*)},$$

que se denomina *integral con límite superior variable*. Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *Toda función $f(x)$, continua en el intervalo (a, b), tiene primitiva en este intervalo. Una de las primitivas es la función*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt,$$

donde c es cualquier punto fijado del intervalo (a, b).

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar que para cualquier x fijado del intervalo (a, b) existe el valor límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ con tal que este valor límite es igual a $f(x)$. En virtud de la propiedad 6° de las integrales definidas (véase el § 5) **), tenemos

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_c^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_c^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Por la fórmula (1.13) del valor medio hallamos

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)\,\Delta x,$$

donde ξ es número comprendido entre los números x y $x + \Delta x$. Ya que la función $f(x)$ es continua en el punto x, entonces, $f(\xi) \to f(x)$ cuando $\Delta x \to 0$. Por eso, de la última fórmula hallamos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x).$$

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Se demuestra análogamente el teorema de la existencia de la primitiva de una función, continua *en el segmento* $[a, b]$. Notemos que en este caso, se puede tomar a en calidad de límite inferior de integración c.

---

*) Hemos denotado la variable de integración mediante la letra t, puesto que la letra x designa el límite superior de integración.

**) El incremento Δx se toma tan pequeño que $(x + \Delta x)$ pertenece a (a, b).

OBSERVACIÓN 2. En la demostración del teorema 1.6 hemos establecido la existencia de la derivada de la integral con límite superior variable y hemos demostrado que esta derivada es igual a la función subintegral

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{c}^{x} f(t)\,dt\right)=f(x). \tag{1.17}$$

OBSERVACIÓN 3. Notemos que si la función $f(x)$ es integrable en todo segmento que se contiene en el intervalo (a, b), entonces la integral con límite superior variable es función de límite superior, continua en el intervalo (a, b). Para cerciorarse de esto, demostremos que el incremento $\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x)$ de la función $F(x) = \int_{c}^{x} f(t)\,dt$ tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$. En virtud de la fórmula (1.12), tenemos

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \mu \Delta x,$$

donde el número μ se comprende entre las cotas superior e inferior exactas de la función $f(x)$ en el segmento $[x, x+\Delta x]$. De la última fórmula se desprende que también $\Delta F \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.

OBSERVACIÓN 4. La integral con límite superior variable se usa frecuentemente para definir nuevas funciones. Ya hemos notado en el cap. 6 que las primitivas de algunas funciones elementales no se expresan mediante funciones elementales y por eso no son funciones elementales. Recordemos que entre funciones no elementales se encuentran, por ejemplo, las funciones

$$\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt \quad \text{y} \quad \int_{0}^{x} \cos t^2\,dt.$$

2. Fórmula principal del cálculo integral. Hemos demostrado que cualesquiera dos primitivas de la función dada $f(x)$ se diferencian en una constante (véase el teorema 6.1 del tomo 1). Por eso, según el teorema 1.6 y la observación 1 de este teorema, se puede afirmar que toda primitiva $\Phi(x)$ de la función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, tiene la forma

$$\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt + C,$$

donde C es una constante.

Poniendo en la última fórmula primeramente $x = a$ y, después, $x = b$ y empleando la propiedad 1° de las integrales definidas,

hallamos

$$\Phi(a)=C, \quad \Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx+C \text{ *)}.$$

De estas igualdades se desprende la relación

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a) \tag{1.18}$$

llamada *fórmula principal del cálculo integral* **).

Así pues, *para calcular la integral definida de la función continua f (x) hay que determinar la diferencia de los valores de los límites superior e inferior de integración de su primitiva arbitraria.*

Notemos que la fórmula principal del cálculo integral ensancha las posibilidades para calcular integrales definidas, puesto que la determinación de la integral definida se reduce a la búsqueda de la función primitiva. Los métodos para determinar las primitivas fueron elaborados bastante completamente en los capítulos 6 y 7 del tomo 1 del presente curso.

Ya que en muchos casos la determinación de las primitivas es un problema difícil de resolver, es lógico buscar los métodos aproximados para calcular las integrales definidas. En el cap. 3 proporcionamos algunos métodos para calcular aproximadamente integrales definidas.

A veces, la fórmula (1.18) se escribe de otra forma. A saber, la diferencia $\Phi(b)-\Phi(a)$ se denota por el símbolo $\Phi(x)\,\big|_a^b$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(x)\Big|_a^b. \tag{1.19}$$

Consideremos varios ejemplos:

1) $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx=-\cos x\Big|_a^b=\cos a-\cos b,$

2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2,$

3) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^1=1-\frac{1}{e}.$

---

*) En esta fórmula hemos denotado la variable de integración mediante la letra x, puesto que el límite superior tiene valor fijado b.

**) Esta fórmula se denomina también *fórmula de Newton — Leibniz.*

4) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

5) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$,

6) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^3 = \ln (3 + \sqrt{10})$.

3. Cambio de variable bajo el signo de la integral definida. Sea que se cumplen las siguientes condiciones:

1) *la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$*;

2) *el segmento $[a, b]$ es conjunto de valores de una función $x = g(t)$ definida en el segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ y que tiene derivada continua en este segmento*;

3) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

En estas condiciones es válida la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]\,g'(t)\,dt. \tag{1.20}$$

La fórmula (1.20) muestra que si está calculada la integral en el miembro izquierdo de esta fórmula, está calculada también la integral en el miembro derecho, y viceversa. Dicha fórmula se denomina *fórmula del cambio de variable bajo el signo de la integral definida.*

Consideremos una primitiva $\Phi(x)$ de la función $f(x)$. Según la fórmula (1.18), tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1.21}$$

Ya que las funciones $\Phi(x)$, y $x = g(t)$ son diferenciables en los segmentos correspondientes, entonces la función compuesta $\Phi(g(t))$ es diferenciable en el segmento $[\alpha, \beta]$. Por eso, aplicando la regla para diferenciar la función compuesta, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = \Phi'(g(t))\,g'(t), \tag{1.22}$$

con tal que la derivada Φ' se calcula respecto al argumento x: $\Phi'(g(t)) = \Phi'(x)$, donde $x = g(t)$. Ya que $\Phi'(g) = f(x)$, entonces, para $x = g(t)$, obtenemos $\Phi'(g(t)) = f(g)\,t))$. Poniendo este valor de $\Phi'(g(t))$ en el miembro derecho de la igualdad (1.22), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = f(g(t))\,g'(t).$$

Por consiguiente, la función $\Phi(g(t))$, definida y continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, es primitiva de la función $f(g(t))\,g'(t)$ en este segmento, y, por eso, según la fórmula (1.18),

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))\,g'(t)\,dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)).$$

Ya que $g(\beta) = b$ y $g(\alpha) = a$, entonces,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))\,g'(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Comparando la última fórmula y la (1.21), nos cercioramos de la validez de la fórmula (1.20).

EJEMPLOS. 1) Consideremos la integral $\int_{1}^{2} \ln x \frac{dx}{x}$. Hagamos $x = e^t$. Ya que $t = 0$ para $x = 1$, $t = \ln 2$ para $x = 2$, entonces

$$\int_{1}^{2} \ln x \frac{dx}{x} = \int_{0}^{\ln 2} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{\ln 2} = \frac{1}{2}\ln^2 2.$$

2) Consideremos la integral $\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$. Sea $x = t^2$. Entonces, $x = \pi^2/_4$ para $t = \pi/2$ y $x = \pi^2$ para $t = \pi$. Por eso

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt = -2\cos t\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2.$$

4. Fórmula de integración por partes. Sea que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ *tienen dirivadas continuas en el segmento* $[a, b]$. *Entonces tiene lugar la siguiente fórmula de integración por partes para las integrales definidas*:

$$\int_{a}^{b} u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (1.23)$$

Ya que $v'(x)\,dx = dv$ y $u'(x)\,dx = du$, entonces esta fórmula se escribe también de otro modo:

$$\int_{a}^{b} u\,dv = [uv]\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\,du. \qquad (1.24)$$

No es difícil cerciorarse de que estas fórmulas son válidas. En efecto, la función $u(x)\,v(x)$ es primitiva de la función $u(x)\,v'(x)+v(x)u'(x)$. Por eso, en virtud de (1.19):

$$\int_a^b [u(x)\,v'(x)+v(x)\,u'(x)]\,dx=[u(x)\,v(x)]\Big|_a^b.$$

De aquí, empleando la propiedad 3° de las integrales definidas (véase el § 5), obtenemos las fórmulas (1.23) y (1.24).

EJEMPLOS.

1) $\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x\,\frac{dx}{x}=[x\ln x-x]\Big|_1^2=2\ln 2-1.$

2) $\int_1^2 xe^x\,dx=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^x\,dx=e^x(x-1)\Big|_1^2=e^2.$

3) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx=x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^2}=$

$$=\left[x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}.$$

5. Término residual de la fórmula de Taylor en forma integral. Apliquemos la fórmula (1.23) para deducir *la fórmula de Taylor de la función $f(x)$ con término residual en forma integral*. Sea que la función $f(x)$ tiene en un ε-entorno del punto a derivada continua de $(n+1)$-ésimo orden y sea x cualquier punto dado del ε-entorno. Cerciorémonos de que el número

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt \tag{1.25}$$

es término residual de la fórmula de Taylor para la función $f(x)$ con centro de desarrollo en el punto a. *De este modo, la fórmula* (1.25) *representa el término residual de la fórmula de Taylor para la función $f(x)$ en forma integral.*

Para demostrarlo, observemos que

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt.$$

Apliquemos la fórmula de integración por partes (1.23) a la integral $\int_a^x f'(t)\,dt$, poniendo $u(t)=f'(t)$ y $v(t)=-(x-t)$ (ya que

x es fijado, $v'\,dt = dt$). Tenemos

$$\int_a^x f'(t)\,dt = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

Poniendo la expresión hallada para $\int_a^x f'(t)\,dt$ en la fórmula anteriormente aducida de $f(x)$, obtenemos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

A la integral $\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$ puede aplicarse también la fórmula de integración por partes, poniendo $u(t) = f''(t)$ y $v(t) = -\frac{1}{2}(x-t)^2$ (ya que x es fijado, $v'\,dt = (x-t)\,dt$). Después de hacer transformaciones no complicadas, hallamos

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{1}{2!}\int_a^x f^{(3)}(t)(x-t)^2\,dt$$

y por eso

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{1}{2!}\int_a^x f^{(3)}(t)(x-t)^2\,dt.$$

Luego hacemos la integración por partes hasta que obtengamos la fórmula

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Esta fórmula muestra que $R_{n+1}(x)$ es realmente término residual de la fórmula de Taylor para la función $f(x)$ con centro de desarrollo en el punto a (véase el § 13 del cap. 8, tomo 1). Empleando la forma integral (1.25) del término residual de la fórmula de Taylor, es fácil obtener el término residual de la fórmula de Taylor en forma de Lagrange. Utilizando precisamente la forma generalizada (1.15) de la

fórmula del valor medio obtenemos

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_a^x=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

La expresión obtenida es el término residual en forma de Lagrange *) (véase la fórmula (8.46) del § 14, cap. 8, tomo 1).

Complemento 1

Algunas desigualdades importantes para las sumas y las integrales

1. Deducción de una desigualdad preliminar. Sean A y B cualesquiera números no negativos, y sean p y p' cualesquiera dos números superiores a la unidad y ligados por la relación $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ (estos números se denominarán *conjugados*). Entonces,

$$AB\leqslant\frac{A^p}{p}+\frac{B^{p'}}{p'}. \tag{1.26}$$

Hallemos el valor máximo de la función $f(x)=x^{1/p}-\frac{x}{p}$ en la semirrecta $x\geqslant 0$. Ya que $f'(x)=\frac{1}{p}\left(x^{\frac{1}{p}-1}-1\right)=\frac{1}{p}\left(x^{-\frac{1}{p'}}-1\right)$, entonces $f'(x)>0$, cuando $0<x<1$, y $f'(x)<0$, cuando $x>1$. Por eso, la función tiene máximo $f(1)=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{p'}$. Pues, para todos los $x\geqslant 0$

$$x^{1/p}-(x/p)\leqslant 1/p'.$$

Tomando en la última desigualdad $x=A^pB^{-p'}$ **) y multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por $B^{p'}$, obtenemos la desigualdad (1.26).

2. Desigualdad de Hölder *) para las sumas.** Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ cualesquiera que sean números no negativos y sea que p y p' tienen el mismo sentido que anteriormente. Entonces es válida la siguiente desigualdad:

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left[\sum_{i=1}^n a_i^p\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^n b_i^{p'}\right]^{1/p'} \tag{1.27}$$

llamada *desigualdad de Hölder para las sumas.*

*) Notemos que deduciendo así el término residual en forma de Lagrange, para la derivada de $(n+1)$-ésimo orden se imponen restricciones un poco mayores que en el § 14 del cap. 8, tomo 1. No obstante, si empleamos el teorema de Darboux demostrado al final del cap. 9 del tomo 1 (sobre el paso de la derivada por todos sus valores intermedios), obtenemos el término residual en forma de Lagrange solamente a condición de la existencia y la integrabilidad de $f^{(n+1)}(x)$.

**) Aquí tomamos $B>0$, puesto que, para $B=0$, la validez de la desigualdad (1.26) no suscita dudas.

***) Hölder, matemático alemán (1859—1937).

En primer lugar demostremos que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son números no negativos, cualesquiera que sean, que satisfacen las desigualdades

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^p \leqslant 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} B_i^{p'} \leqslant 1, \tag{1.28}$$

entonces para estos números es válida la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqslant 1. \tag{1.29}$$

En efecto, escribiendo para todos los pares de los números A_i y B_i las desigualdades (1.26) y sumando estas desigualdades por todos los i de 1 a n, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqslant \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} A_i^p + \frac{1}{p'} \sum_{i=1}^{n} B_i^{p'} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Por lo tanto, la desigualdad (1.29) queda demostrada.

Pongamos ahora

$$A_i = \frac{a_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{1/p}}, \quad B_i = \frac{b_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^{p'}\right]^{1/p'}} \text{*)}.$$

Es fácil ver que los números A_i y B_i satisfacen las desigualdades (1.28), y, por eso, para estos números es válida la desigualdad (1.29) que en este caso puede escribirse de modo siguiente:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}} \leqslant 1.$$

De la última desigualdad se desprende la desigualdad de Hölder (1.27).

OBSERVACION. En el caso particular de $p = p' = 2$, la desigualdad de Hölder se transforma en la desigualdad siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{1.30}$$

La desigualdad (1.30) se denomina *desigualdad de Buniakovski* **) *para las sumas.*

---

*) Consideramos que al menos uno de los números a_i y al menos uno de los números b_i son diferentes de cero puesto que, en caso contrario, la fórmula (1.27) no necesita la demostración.

**) Viktor Buniakovski, matemático ruso (1804—1889).

3. Desigualdad de Minkowski *) para las sumas. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ cualesquiera números no negativos y el número $p > 1$. Entonces es válida la siguiente desigualdad:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad (1.31)$$

llamada *desigualdad de Minkowski para las sumas*. Ante todo transformemos la suma en el miembro izquierdo de (1.31). Se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}.$$

Apliquemos la desigualdad de Holder a cada una de las sumas situadas en el miembro derecho. Además, ya que $(p-1)p' = p$ y $\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)p'}\right]^{1/p'} +$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)p'}\right]^{1/p'} =$$

$$= \left\{\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right]^{1/p}\right\}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{p-1/p}.$$

Al dividir ambos miembros de la última desigualdad por $\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{p-1/p}$ obtenemos la desigualdad de Minkowski (1.31).

4. Integrabilidad de una potencia positiva arbitraria del módulo de una función integrable. Demostremos el siguiente teorema.

Teorema **1.7.** *Si la función $f(x)$ es integrable en el segmento $[a, b]$, entonces, la función $|f(x)|^r$ es también integrable en el segmento $[a, b]$, siendo r cualquier número real positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar el teorema para el caso de $r < 1$, puesto que, si $r > 1$, la función $|f(x)|^r$ puede representarse en forma del producto $|f(x)|^{[r]}|f(x)|^{r-[r]}$, donde $[r]$ es parte entera de r y $r-[r] < 1$. En virtud de la observación 2 del p. 1 del § 6, la función $|f(x)|$ es integrable en el segmento $[a, b]$, y, por eso, conforme a la propiedad 3° del § 5, la función $|f(x)|^{[r]}$ es integrable en este segmento. Pero, entonces, en virtud de la misma propiedad y la integrabilidad de la función $|f(x)|^{r-[r]}$, la función $|f(x)|^r$ es también integrable en el segmento $[a, b]$. Pues, demostremos el teorema para el caso de $r < 1$. Pongamos $r = 1/p$ y observamos que $p > 1$. Ya que la función $|f(x)|$ es integrable en el segmento $[a, b]$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una partición T de este segmento, para la cual

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon^p(b-a)^{(1-p)}. \qquad (1.32)$$

*) Hermann Minkowski, matemático y físico alemán (1864—1909).

Aquí, mediante M_i y m_i se denotan las cotas exactas de la función $|f(x)|$ en el segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$. Basta demostrar que la suma

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i^{1/p}-m_i^{1/p})\,\Delta x_i \qquad (1.33)$$

es menor de ε.

Estimemos esta suma empleando la desigualdad de Hölder (1.27) y poniendo en ella $a_i=(M_i^{1/p}-m_i^{1/p})(\Delta x_i)^{1/p}$, $b_i=(\Delta x_i)^{1/p'}$. Obtenemos

$$S-s\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(M_i^{1/p}-m_i^{1/p})^p\,\Delta x_i\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^{1/p'}. \qquad (1.34)$$

Demostremos ahora que

$$(M_i^{1/p}-m_i^{1/p})^p\leqslant(M_i-m_i). \qquad (1.35)$$

Al dividir por M_i *) la última desigualdad se reduce a la siguiente:

$$\left[1-\left(\frac{m_i}{M_i}\right)^{1/p}\right]^p\leqslant 1-\frac{m_i}{M_i}.$$

Es fácil convencerse de la validez de la última desigualdad teniendo en cuenta que $0\leqslant\frac{m_i}{M_i}<1$ y $p>1$. Empleando la desigualdad (1.35) y tomando en consideración que

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a,$$

de la desigualdad (1.34) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$S-s\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta x_i\right]^{1/p}(b-a)^{1/p'}.$$

De aquí, empleando la desigualdad (1.32) y teniendo en cuenta que $(1/p)+(1/p')=1$, hallamos

$$S-s<\varepsilon.$$

El teorema queda demostrado.

5. Desigualdad de Hölder para las integrales. Sean $f(x)$ y $g(x)$ cualesquiera dos funciones integrables en el segmento $[a, b]$ y sean p y p' cualesquiera dos números, no superiores a la unidad y ligados por la relación $(1/p)+(1/p')=1$. Entonces es válida la siguiente desigualdad

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\left[\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b|g(x)|^{p'}\,dx\right]^{1/p'} \qquad (1.36)$$

llamada *desigualdad de Hölder para las integrales.* Notemos que la existencia de las integrales en el miembro derecho de (1.36) se garantiza por el teorema 1.7, y de la integral en el miembro izquierdo, por la propiedad 3° del § 5.

---

*) Puede considerarse que $M_i>0$, puesto que si $M_i=0$, entonces $m_i=0$, y la desigualdad (1.35) es válida.

Demostremos primero que si $A(x)$ y $B(x)$ son dos funciones no negativas e integrables en el segmento $[a, b]$ que satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b A^p(x)\,dx \leqslant 1, \quad \int_a^b B^{p'}(x)\,dx \leqslant 1, \tag{1.37}$$

entonces,

$$\int_a^b A(x)\,B(x)\,dx \leqslant 1. \tag{1.38}$$

En efecto, en cualquier punto x del segmento $[a, b]$ es válida la desigualdad (1.26)

$$A(x)\,B(x) \leqslant \frac{A^p(x)}{p} + \frac{B^{p'}(x)}{p'}.$$

De aquí, en virtud de la estimación de 3° del § 6 y de las fórmulas (1.37),

$$\int_a^b A(x)\,B(x)\,dx \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b A^p(x)\,dx + \frac{1}{p'}\int_a^b B^{p'}(x)\,dx \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

La desigualdad (1.38) queda demostrada.

Poniendo

$$A(x) = \frac{|f(x)|}{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}}, \quad B(x) = \frac{|g(x)|}{\left[\int_a^b |g(x)|^{p'}\,dx\right]^{1/p'}},$$

llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^{p'}\,dx\right]^{1/p'}.$$

Ya que, en virtud de la observación 2 del p. 1 del § 6,

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx,$$

entonces, la desigualdad de Hölder (1.36) para las integrales queda establecida.

OBSERVACIÓN. En el caso particular de $p = p' = 2$ la desigualdad de Hölder para las integrales se transforma en la siguiente desigualdad:

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}\,\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx}, \tag{1.39}$$

llamada *desigualdad de Cauchy — Buniakovski para las integrales.*

6. La desigualdad de Minkowski para las integrales. Para cualesquiera funciones $f(x)$ y $g(x)$ no negativas e integrables en el segmento $[a, b]$ y para

cualquier número $p > 1$, es válida la siguiente desigualdad:

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b f^p(x)\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b g^p(x)\,dx\right]^{1/p} \quad (1.40)$$

llamada *desigualdad de Minkowski para las integrales*. Para obtener esta desigualdad hay que utilizar la fórmula

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^p\,dx = \int_a^b f(x)\,[f(x)+g(x)]^{p-1}\,dx + \int_a^b g(x)\,[f(x)+g(x)]^{p-1}\,dx$$

y aplicar la desigualdad de Hölder a las integrales que están en el miembro derecho de esta fórmula. Dejamos a cargo del lector la demostración pormenorizada. Empleando la inducción, de la desigualdad (1.40) puede obtenerse la siguiente desigualdad para n funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, no negativas e integrables en el segmento $[a, b]$:

$$\left\{\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]^p\,dx\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b f_1^p(x)\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b f_2^p(x)\,dx\right]^{1/p} + \ldots + \left[\int_a^b f_n^p(x)\,dx\right]^{1/p}.$$

Complemento 2

Demostración de la afirmación del p. 4 del § 6

Para que sea más cómodo, volvamos a enunciar la afirmación del p. 4 del § 6. *Si en el segmento $[a, b]$ la función $g(x)$ es monótona y $f(x)$, integrable, entonces en este segmento existe un número ξ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \quad (1.40)\ ^*)$$

Demostremos primero la siguiente proposición auxiliar.

Lema de Abel **). *Sean $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \ldots v_n \geqslant 0$ y $u_1, u_2, \ldots, u_n$ números cualesquiera. Si para todo i las sumas $S_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_i$ se comprenden entre A y B, entonces la suma $v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots + v_nu_n$ se comprende entre los números Av_1 y Bv_1.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos $u_1 = S_1$, $u_i = S_i - S_{i-1}$. Por eso,

$$v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots + v_nu_n = v_1S_1 + v_2(S_2 - S_1) + \ldots + v_n(S_n - S_{n-1}) = S_1(v_1 - v_2) + S_2(v_2 - v_3) + \ldots + S_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + S_nv_n.$$

*) Para la comodidad, mantenemos la numeración de la fórmula aducida.

**) Nils Henrik Abel, matemático noruego (1802—1829).

Ya que $v_i \geqslant 0$ y $v_i - v_{i+1} \geqslant 0$, entonces, cambiando en la última relación todo S_i primero por A y después por B, obtenemos las desigualdades

$$A[(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \ldots + (v_{n-1} - v_n) + v_n] \leqslant$$
$$\leqslant (v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n) \leqslant B[(v_1 - v_2) +$$
$$+ (v_2 - v_3) + \ldots + (v_{n-1} - v_n) + v_n].$$

De aquí, observando que las expresiones entre corchetes son iguales a v_1, obtenemos

$$A v_1 \leqslant v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n \leqslant B v_1.$$

El lema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Para demostrar el lema de Abel hemos empleado la *transformación de la suma* $\sum_{k=1}^{n} v_k u_k$ que suele llamarse *transformación de Abel*. En el p. 2 del § 5 del cap. 4 hay información más completa sobre la transformación de Abel y sus aplicaciones más importantes.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN DEL P. 4 DEL § 6. Admitamos que la función $g(x)$ no crece en $[a, b]$ y no es negativa sobre este segmento. En virtud de la integrabilidad de $f(x) \cdot g(x)$ *), tenemos

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) g(x_{i-1}) \Delta x_i,$$

donde $\Delta = \max \Delta x_i$.

Sean M_i y m_i cotas exactas de $f(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces, ya que $g(x)$ es no negativa, son válidas las desigualdades

$$\sum_{i=1}^{n} m_i g(x_{i-1}) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) g(x_{i-1}) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i g(x_{i-1}) \Delta x_i. \quad (1.41)$$

Puesto que $g(x)$ no crece en $[a, b]$, entonces la diferencia

$$\sum_{i=1}^{n} M_i g(x_{i-1}) \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i g(x_{i-1}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) g(x_{i-1}) \Delta x_i$$

no supera el número $g(a) \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i$. Ya que la función $f(x)$ es integrable, la suma $\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ tiende a cero cuando $\Delta \to 0$. De aquí y de las desigualdades (1.41) se desprende que para *cualesquiera números* μ_i que satisfacen las desigualdades $m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$, cada una de las sumas

$$\sum_{i=1}^{n} m_i g(x_{i-1}) \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i g(x_{i-1}) \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} M_i g(x_{i-1}) \Delta x_i$$

*) Véase la propiedad 3° del § 5.

tiene por límite la integral $\int_a^b f(x) g(x)\,dx$ para $\Delta \to 0$. Conforme a la fórmula (1.12), se puede elegir los números μ_i, $m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$, de tal modo que $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \mu_i \Delta x_i$. Puesto que la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en el segmento $[a, b]$ (véase la observación 3 del p. 1 del § 7), los números $S_i = \sum_{k=1}^{i} \mu_k \Delta x_k = \int_a^{x_i} f(t)\,dt$ se comprenden entre la cota inferior exacta m y la cota superior exacta M de la función $F(x)$ en el segmento $[a, b]$. Pongamos $v_1 = g(a)$, $v_2 = g(x_1)$, ..., $v_n = g(x_{n-1})$, $u_1 = \mu_1 \Delta x_1$, ..., $u_n = \mu_n \Delta x_n$. Ya que $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \ldots \geqslant v_n \geqslant 0$ y las sumas $S_i = \sum_{k=1}^{i} u_k$ se comprenden entre m y M, entonces, en virtud del lema de Abel, la suma $\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \mu_i \Delta x_i$ se encuentra entre $mg(a)$ y $Mg(a)$. Pero, entonces, para $\Delta \to 0$ el límite de esta suma se encuentra también entre $mg(a)$ y $Mg(a)$, o sea, son válidas las desigualdades

$$g(a)\, m \leqslant \int_a^b f(x) g(x)\,dx \leqslant g(a)\, M.$$

La función continua $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ toma todo valor A comprendido entre sus cotas exactas m y M, es decir, existe un punto ξ tal que

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(t)\,dt = A = \frac{\int_a^b f(x) g(x)\,dx}{g(a)}.$$

Por eso,

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\,dx. \qquad (1.42)$$

Si la función no creciente $g(x)$ tiene también valores negativos, entonces la función $h(x) = g(x) - g(b)$ es no creciente y tiene valores no negativos. Por eso, en virtud de (1.42),

$$\int_a^b f(x) [g(x) - g(b)]\,dx = [g(a) - g(b)] \int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

De aquí, haciendo transformaciones simples, obtenemos la fórmula (1.40).

Capítulo 2

APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. Longitud de un arco de una curva

1. Concepto de curva plana. Es más lógico considerar la curva como trayectoria de un punto móvil. En el presente punto daremos el sentido matemático de esta idea de la curva e introduciremos el concepto de la llamada *curva simple*.

Sean funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ continuas en un segmento $[\alpha, \beta]$ (a continuación el argumento de estas funciones se denominará parámetro). Si consideramos el parámetro t como tiempo, dichas funciones determinan la ley del movimiento del punto M con coordenadas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{2.1}$$

por el plano (fig. 2.1) *). El conjunto $\{M\}$ de los puntos M correspondientes a todos los valores posibles del parámetro t en el segmento $[\alpha, \beta]$ se considera lógicamente como *trayectoria* del punto M que se mueve según la ley (2.1). Notemos que el conjunto $\{M\}$, siendo la trayectoria de un punto móvil, no corresponde obligatoriamente a nuestras representaciones de la curva. Por ejemplo, se puede indicar funciones continuas $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, dadas sobre el segmento $[0, 1]$, y tales que la trayectoria del punto M que se mueve según la ley $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, llenará un cuadrado entero. Por tanto, es lógico separar tales conjuntos $\{M\}$ que corresponden a nuestras representaciones de la curva. De este modo, llegamos al concepto de *curva simple*.

Denominamos curva plana simple L el conjunto $\{M\}$ de todos los puntos M cuyas coordenadas se determinan por las ecuaciones (2.1) *si a valores diferentes del parámetro t del segmento* $[\alpha, \beta]$ *les corresponden puntos diferentes de este conjunto.*

Utilizaremos también los términos siguientes: «*las ecuaciones* (2.1) *determinan la curva plana simple L*» y «*la curva plana simple está parametrizada empleando las ecuaciones* (2.1)».

Todo punto del conjunto $\{M\}$ que figura en la definición de la curva plana simple se llamará punto de esta curva con tal que los puntos correspondientes a los valores de frontera α y β del parámetro t se denominarán puntos *de frontera* de la curva plana.

---

*) Aquí y en adelante denominamos *plano* el conjunto de todos los pares ordenados posibles (x, y) de los números x o y (todo par se denomina punto del plano). Los números x e y se denominan coordenadas del punto (x, y). Para abreviar, denotamos también el punto (x, y) por una letra M. La denotación $M(x, y)$ significa que el punto M tiene coordenadas x e y.

La gráfica de la función $y = f(x)$, continua en el segmento $[\alpha, \beta]$, puede servir de ejemplo de una curva plana. En efecto, se puede considerar esta gráfica como la trayectoria del punto M que se mueve según la ley $x = t$, $y = f(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ con tal que a valores diferentes del parámetro t les corresponden evidentemente puntos diferentes de la gráfica.

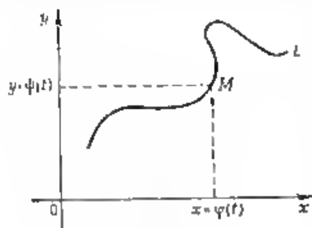


Fig. 2.1

OBSERVACION 1. Las curvas simples no agotan todos los conjuntos puntuales que pueden denominarse «*curva*». Sin embargo, para nuestros fines nos basta el concepto de curva simple.

OBSERVACION 2. Una misma curva simple puede ser parametrizada por varios métodos. Consideraremos todas las posibles parametrizaciones de la curva simple L obtenidas de una parametrización dada representando el parámetro t en forma de funciones continuas estrictamente monótonas de otro parámetro s.

OBSERVACION 3. Un concepto importante es el *de curva cerrada simple*. Esta curva se forma del modo siguiente. Sean L_1 y L_2 dos curvas simples con tal que: 1) los puntos de frontera de la curva L_1 coinciden con los puntos de frontera de la curva L_2; 2) cualesquiera puntos de las curvas L_1 y L_2 que no son de frontera, son diferentes. La curva L obtenida uniendo las curvas L_1 y L_2 se denomina curva cerrada simple.

2. **Forma paramétrica de representación de la curva.** En el análisis matemático y sus aplicaciones es cómodo considerar las curvas dadas en forma paramétrica. El origen evidente de este método para representar la curva es *la idea de la curva como el lugar geométrico de las posiciones sucesivas del punto móvil*. Por ejemplo, el lugar geométrico de las posiciones sucesivas del punto M, con coordenadas x e y, que se mueve según la ley

$$x = a\,\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad y = at\,\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad -\infty < t < \infty, \tag{2.2}$$

es una curva llamada *estrofoide* (fig. 2.2). Observemos que el punto M, que se mueve por la estrofoide, se encuentra dos veces en una misma posición $x = 0$, $y = 0$ cuando $t = -1$ y cuando $t = 1$. Ya que consideramos posiciones sucesivas del punto móvil, es lógico considerar que valores diferentes del parámetro t corresponden a puntos diferentes de la estrofoide.

La estrofoide no es curva simple. Sin embargo, no es difícil cerciorarse de que el campo de valores del parámetro t puede dividirse en partes de tal modo que las partes correspondientes de la estrofoide se-

an curvas **simples**. A saber, dividamos la recta numérica $-\infty < t < < \infty$ en segmentos $[n-1, n]$ donde n es cualquier número entero. Obviamente, si consideramos el parámetro t en este segmento, la parte correspondiente de la estrofoide será curva simple.

Empleamos esta idea de división en partes para definir matemáticamente el concepto de curva dada paramétricamente.

Consideremos que el conjunto $\{t\}$ es segmento, o semisegmento, o bien intervalo, o la recta numérica, o semirrecta abierta o cerrada.

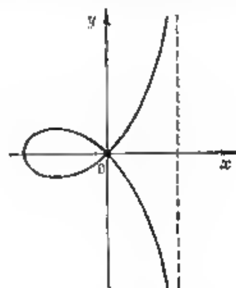


Fig. 2.2

Introduzcamos el concepto de partición del conjunto $\{t\}$. Diremos que un conjunto finito o infinito de segmentos $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ parte el conjunto $\{t\}$ si: 1) la unión de todos los segmentos es toda el conjunto $\{t\}$ y 2) solamente los extremos de cualesquiera dos segmentos del sistema pueden ser sus puntos comunes.

Consideremos ejemplos de particiones de algunos conjuntos $\{t\}$ de los mencionados anteriormente.

1. El sistema de los segmentos $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$ parte obviamente el segmento $[0, 1]$.

2. El sistema de los segmentos $[0, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, $[3/4, 7/8]$, . . ., . . ., $\left[\frac{2^n-1}{1}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right]$, . . . parte el semisegmento $[0, 1)$.

3. El sistema de los segmentos $\{[n-1, n]\}$, donde n es cualquier número entero, parte obviamente toda la recta numérica.

Pasemos ahora a definir el concepto de la curva dada paramétricamente.

Sean las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ continuas en el conjunto $\{t\}$ *). Diremos que *las ecuaciones*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{2.3}$$

prefijan paramétricamente una curva L si existe un sistema de segmentos $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ que parten el conjunto $\{t\}$ y tal que para los valores t de todo segmento dado de este sistema las ecuaciones (2.3) *determinan una curva simple.*

Además, *los puntos de la curva L se consideran en un orden determinado correspondientemente al crecimiento del parámetro t.* A saber, si el punto M_1 corresponde al valor del parámetro t_1, y el punto M_2, al valor t_2, entonces M_1 se toma como antecedente a M_2 si $t_1 < t_2$.

*) El conjunto $\{t\}$ es uno de los conjuntos anteriormente mencionados.

Notemos que los puntos correspondientes a valores diferentes del parámetro siempre se consideran diferentes.

En otras palabras, la curva dada paramétricamente puede considerarse como la unión de curvas simples con tal que estas últimas son recorridas sucesivamente por el punto M cuyas coordenadas se determinan por las relaciones (2.3) cuando el parámetro t recorre monótonamente el conjunto $\{t\}$.

OBSERVACIÓN 1. La curva simple puede considerarse como una curva dada paramétricamente. En este caso, el sistema de segmentos que parte el segmento $[\alpha, \beta]$ se reduce sólo a este segmento.

A título de ejemplo consideremos la curva L dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \tag{2.4}$$

donde t varía en el segmento $[0, 4\pi]$. Evidentemente, el sistema de los segmentos $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, $[3\pi, 4\pi]$ parte el segmento $[0, 4\pi]$ con tal que, para los valores t de cada uno de dichos segmentos del sistema dado, las ecuaciones (2.4) determinan una curva simple (la semicircunferencia). De la representación geométrica se desprende que, en el ejemplo considerado, la curva L es circunferencia dos veces recorrida.

OBSERVACIÓN 2. El ejemplo considerado y el de la estrofoide muestran que la curva dada paramétricamente puede tener puntos de autointersección e, incluso, intervalos de autosuperposición.

OBSERVACIÓN 3. En el caso de la curva dada paramétricamente por las ecuaciones (1.3), hablaremos también de la parametrización de dicha curva mediante estas ecuaciones. Una misma curva L puede parametrizarse por varios métodos. Consideraremos todas las parametrizaciones posibles de la curva L obtenidas de cualquier parametrización dada representando el parámetro t en forma de funciones continuas estrictamente crecientes de otro parámetro s. Señalemos que sólo para estas transformaciones del parámetro se mantiene el orden de seguimiento de los puntos en la curva L.

3. Concepto de curva espacial. El concepto de curva espacial se introduce de manera completamente análoga al concepto de curva plana. En primer lugar, se introduce el concepto de curva espacial simple como un conjunto $\{M\}$ de puntos del espacio cuyas coordenadas x, y, z se determinan por las ecuaciones

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{2.5}$$

a condición de la continuidad de las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ y la condición de que los puntos del conjunto $\{M\}$ correspondientes a valores diferentes del parámetro t no coinciden.

Igual que en el caso del plano, el concepto de curva espacial simple y el de partición del conjunto $\{t\}$ de variación del parámetro llevan al concepto de curva espacial dada por las ecuaciones para

métricas (2.5) si se observa la condición de la variación monótona del parámetro t sobre el conjunto $\{t\}$.

Notemos que todos los términos introducidos en los puntos anteriores se transfieren lógicamente al caso de curvas espaciales.

4. Concepto de longitud de un arco de una curva. En este punto introduzcamos el concepto de longitud de un arco de una curva dada paramétricamente.

Sea que la curva L es prefijada por las ecuaciones paramétricas (2.3)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

donde el parámetro t varía sobre el segmento $[\alpha, \beta]$.

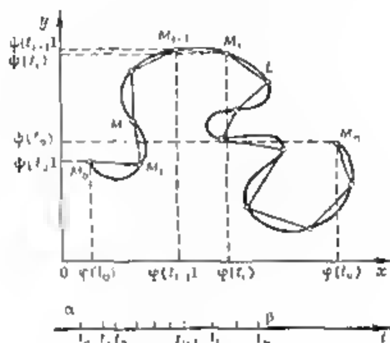


Fig. 2.3

Sea T partición arbitraria del segmento $[\alpha, \beta]$ por los puntos $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$. Denotemos mediante M_0, M_1, M_2, ..., M_n los puntos correspondientes de la curva L (fig. 2.3). La quebrada $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ que aparece se denominará quebrada *) inscrita en la curva L y correspondiente a la partición dada T del segmento $[\alpha, \beta]$. Ya que la longitud l_i del tramo $M_{i-1}M_i$ de esta

*) Denominaremos *recta* una línea determinada por las ecuaciones paramétricas $x = at + b$, $y = ct + d$. Se puede escoger de antemano las constantes a, b, c, d de tal modo que la recta pase a través de dos puntos dados $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$. La parte de la recta entre los puntos M_1 y M_2 se llama naturalmente *segmento*, y el conjunto de un número finito de segmentos contiguos uno a otro se denomina lógicamente *quebrada*.

quebrada es igual a

$$\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}\ ^{*)},$$

entonces la longitud $\bar{l}(t_i)$ de toda la quebrada es igual a

$$\bar{l}(t_i)=\sum_{i=1}^{n} l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}. \qquad (2.6)$$

Definición. *Si el conjunto $\{\bar{l}(t_i)\}$ de las longitudes de las quebradas inscritas en la curva L y correspondientes a todas las particiones posibles T del segmento $[\alpha, \beta]$ está acotado, entonces la curva L se denomina rectificable, y la cota superior exacta l del conjunto $\{\bar{l}(t_i)\}$ se llama longitud del arco de la curva L.*

OBSERVACIÓN 1. De la definición de la curva L dada paramétricamente y de la definición de la longitud del arco l de esta curva se desprende que la longitud l es positiva, $l>0$.

OBSERVACIÓN 2. Existen curvas no rectificables. En el complemento del presente capítulo aduciremos el ejemplo de una curva plana, cualquier parte de la cual es no rectificable.

A continuación, utilizaremos con frecuencia el lema siguiente.

Lema. *Sea $\bar{l}^*(t_i)$ longitud de una quebrada inscrita en la curva L y correspondiente a la partición T^* del segmento $[\alpha, \beta]$, y sea $\bar{l}(t_i)$ longitud de la quebrada inscrita en la curva L y correspondiente a la partición T obtenida de la partición T^* al añadir varios puntos nuevos. Entonces $\bar{l}^*(t_i)\leqslant\bar{l}(t_i)$.*

DEMOSTRACIÓN. Obviamente, es suficiente considerar el caso cuando a la partición T^* se agrega un punto γ. La quebrada correspondiente a la partición T se diferencia de la quebrada correspondiente a la partición T^* solamente en que un tramo $M_{i-1}M_i$ se sustituye por dos tramos $M_{i-1}C$ y CM_i (C es punto de la curva que corresponde al valor γ del parámetro t). Ya que la longitud del lado $M_{i-1}M_i$ del triángulo $M_{i-1}CM_i$ no supera la suma de las longitudes de otros dos lados**) $M_{i-1}C$ y CM_i, entonces $\bar{l}^*(t_i)\leqslant\bar{l}(t_i)$.

Enumeremos algunas propiedades de curvas rectificables:

1°. *Si la curva L es rectificable, entonces la longitud l de su arco no depende de la parametrización de esta curva.*

---

*) Hemos empleado la fórmula de la distancia entre dos puntos M_{i-1} y M_i cuyas coordenadas son respectivamente iguales a

$$x_{i-1}=\varphi(t_{i-1}),\quad y_{i-1}=\psi(t_{i-1}) \text{ y}$$
$$x_i=\varphi(t_i),\quad y_i=\psi(t_i).$$

**) Se puede demostrar este hecho geométrico de un modo puramente analítico.

2°. *Si la curva rectificable L está dividida en un número finito de curvas L_i mediante un número finito de puntos $M_0, M_1, \ldots, M_n$* *), *entonces cada una de estas curvas L_i es rectificable y la suma de longitudes l_i de todas las curvas L_i es igual a la longitud l de la curva L.*

3°. *Sea la curva L dada paramétricamente por las ecuaciones* (2.3). *Mediante $l(t)$ denotemos la longitud del arco del segmento L_t de la curva L cuyos puntos se definen por todos los valores del parámetro del segmento $[\alpha, t]$. La función $l(t)$ es función creciente y continua del parámetro t.* La función $l = l(t)$ se denominará *arco variable de la curva L.*

4°. *El arco variable l puede tomarse como parámetro.* Este parámetro se denomina *parámetro natural.*

La validez de la propiedad 4° se desprende directamente de la propiedad 3°. En efecto, ya que el arco variable $l = l(t)$ es función creciente y continua del parámetro t, entonces el parámetro t puede representarse también en forma de función continua y monótona $t = l(l)$ del arco variable l. Por eso, se puede elegir el arco variable l como parámetro.

DEMOSTRACIÓN DE LAS PROPIEDADES 1°—3°.

1°. Sea que hay dos parametrizaciones de la curva L, además t y s son parámetros definidos en los segmentos $[\alpha, \beta]$ y $[a, b]$, respectivamente. Ya que t es función continua y estrictamente monótona de s y s es función continua y estrictamente monótona de t, entonces a toda partición T del segmento $[\alpha, \beta]$ le corresponde una partición determinada P del segmento $[a, b]$ y viceversa. Es obvio que las quebradas inscritas en L y correspondientes a las particiones respectivas de los segmentos $[\alpha, \beta]$ y $[a, b]$ son idénticas y, por eso, sus longitudes $\bar{l}(t_i)$ y $\bar{l}(s_i)$ son iguales. Por consiguiente, los conjuntos $\{\bar{l}(t_i)\}$ y $\{\bar{l}(s_i)\}$ son idénticos. De aquí se desprende que la longitud del arco de una curva no depende de la parametrización de esta curva.

2°. Obviamente, es suficiente demostrar la propiedad 2° para el caso cuando el punto C parte la curva L en dos curvas L_1 y L_2. Mediante γ denotemos el valor del parámetro t al cual corresponde el punto C. Entonces, los puntos de la curva L_1 corresponden a los valores del parámetro t del segmento $[\alpha, \gamma]$ mientras los puntos de la curva L_2 corresponden a los valores del parámetro t del segmento $[\gamma, \beta]$. Sean T_1 y T_2 particiones arbitrarias de dichos segmentos y T partición del segmento $[\alpha, \beta]$ obtenida al unir las particiones T_1 y T_2. Si $\bar{l}_1(t_i)$, $\bar{l}_2(t_i)$ y $\bar{l}(t_i)$ son longitudes de las quebradas inscritas en las curvas L_1, L_2 y L, correspondientes a las particiones T_1, T_2 y T de los segmentos anteriormente indicados, entonces es obvio que

$$\bar{l}_1(t_i) + \bar{l}_2(t_i) = \bar{l}(t_i). \tag{2.7}$$

Ya que los números $\bar{l}_1(t_i)$, $\bar{l}_2(t_i)$ y $\bar{l}(t_i)$ son positivos, entonces, de la igualdad (2.7) y de la rectificabilidad de la curva L se desprende que los conjuntos $\{\bar{l}_1(t_i)\}$ y $\{\bar{l}_2(t_i)\}$ de las longitudes de las quebradas, inscritas en las curvas L_1 y L_2 y correspondientes a todas las particiones posibles de los segmentos $[\alpha, \gamma]$ y $[\gamma, \beta]$, están acotados, o sea, las curvas L_1 y L_2 son rectificables. Notemos que de la igualdad (2.7) y de la definición de la longitud del arco de una curva se

*) Además, los puntos $M_0, M_1, \ldots, M_n$ corresponden a los valores $t_0, t_1, \ldots, t_n$ del parámetro t que satisfacen las condiciones $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$.

desprende que las longitudes l_1, l_2 y l de los arcos de las curvas L_1 L_2 y L satisfacen la desigualdad *)

$$l_1 + l_2 \leqslant l. \tag{2.8}$$

Supongamos que $l_1 + l_2 < l$. Entonces, el número

$$l - (l_1 + l_2) = \varepsilon \tag{2.9}$$

es positivo. De la definición de la longitud l del arco de la curva L se desprende que para el número positivo ε se puede indicar una partición T^* del segmento $[\alpha, \beta]$ tal que la longitud $\overline{l^*}$ (t_i) de la quebrada inscrita en la curva L y correspondiente a esta partición satisface la desigualdad $l - \overline{l^*}(t_i) < \varepsilon$. Agreguemos el punto γ a la partición T^* y designemos la partición obtenida mediante T. Entonces, en virtud del lema de este párrafo, la longitud $\overline{l}(t_i)$ de la quebrada correspondiente a la partición T satisface la desigualdad $l - \overline{l}(t_i) < \varepsilon$. Puesto que la partición T del segmento $[\alpha, \beta]$ se hizo uniendo ciertas particiones T_1 y T_2 de los segmentos $[\alpha, \gamma]$ y $[\gamma, \beta]$, entonces las longitudes $\overline{l}_1$ (t_i) y $\overline{l}_2$ (t_i) de las quebradas correspondientes a estas particiones satisfacen la relación (2.7). Por eso es válida la desigualdad $l - [\overline{l}_1(t_i) + \overline{l}_2(t_i)] < \varepsilon$. Ya que $\overline{l}_1(t_i) + \overline{l}_2(t_i) \leqslant$ $\leqslant l_1 + l_2$, tanto más válida es la desigualdad $l - (l_1 + l_2) < \varepsilon$. Pero esta desigualdad contradice la igualdad (2.9). Por eso, la suposición $l_1 + l_2 < l$ es inválida, y, por consiguiente, en virtud de (2.8), $l_1 + l_2 = l$. La validez de la propiedad 2° queda establecida.

3°. De la propiedad 2° y de la observación 1 de este punto se desprende que *el arco variable $l = l(t)$ es función positiva estrictamente creciente del parámetro t.* Para demostrar la continuidad de la función $l(t)$, empleemos las afirmaciones siguientes:

1) *Sean ε cualquier número positivo fijado, t punto arbitrario del segmento $[\alpha, \beta]$ y M punto correspondiente de la curva L. Existe una quebrada inscrita en la curva L que tiene el punto M por su vértice y cuya longitud se diferencia de la longitud de la curva L en menos de $\varepsilon/2$.*

2) *Se puede elegir dicha quebrada de tal modo que la longitud de todo su tramo será menor de $\varepsilon/2$.*

3) *Sea que la quebrada es elegida como se indica en las afirmaciones 1) y 2). Entonces, la parte de la curva L subtendida por cualquier tramo de la quebrada considerada tiene longitud menor de ε.*

Cerciorémonos de que de las afirmaciones formuladas y de la monotonía de la función $l(t)$ se desprende su continuidad en cualquier punto fijado t de este segmento (en los puntos α y β la función $l(t)$ es continua por la derecha y por la izquierda, respectivamente).

Debemos demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un $\delta > 0$ tal que para $|\Delta t| < \delta$, se cumpla la desigualdad $|l(t + \Delta t) - l(t)| < \varepsilon$.

Consideremos aquella partición T del segmento $[\alpha, \beta]$ a la cual corresponde una quebrada que posee las propiedades enumeradas en las afirmaciones 1) y 2). Mediante δ denotemos la mínima de las longitudes de dos segmentos parciales $[t_{k-1}, t_k]$ y $[t_k, t_{k+1}]$ de la partición T que tocan el punto $t = t_k$ del segmento $[\alpha, \beta]$. Sea que el incremento Δt del argumento satisface la condición $|\Delta t| < \delta$. Para la precisión, tomemos $\Delta t > 0$. Ya que $t < t + \Delta t < t + \delta \leqslant t_{k+1}$, entonces, en virtud del crecimiento estricto de la función $l(t)$ son válidas las desigualdades

$$l(t) < l(t + \Delta t) < l(t + \delta) \leqslant l(t_{k+1}).$$

---

*) De la igualdad (2.7) se desprende que para cualesquiera particiones T_1 y T_2 de los segmentos $[\alpha, \gamma]$ y $[\gamma, \beta]$ es válida la desigualdad $\overline{l}_1(t_i) + \overline{l}_2(t_i) \leqslant l$. De aquí y de la definición de la cota superior exacta obtenemos la desigualdad (2.8).

En virtud de la afirmación 3, es válida la desigualdad

$$l(t_{k+1}) - l(t) < \varepsilon.$$

De aquí y de las desigualdades anteriores se desprende que, para $0 < \Delta t < \delta$, es válida la desigualdad

$$l(t + \Delta t) - l(t) < \varepsilon.$$

El caso de $\Delta t < 0$ se considera análogamente.

Pasemos ahora a demostrar las afirmaciones 1), 2) y 3).

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN 1). Sea ε cualquier número positivo fijado. Ya que la longitud $l(\beta)$ de toda la curva L determinada por las ecuaciones paramétricas (2.3) es cota superior exacta de las longitudes de las quebradas inscritas en esta curva correspondientes a todas las particiones posibles del segmento $[\alpha, \beta]$, entonces, para $\varepsilon > 0$ dado se puede indicar una partición T^{**} del segmento $[\alpha, \beta]$ para la cual la longitud de la quebrada correspondiente inscrita en la curva L se diferencia de $l(\beta)$ en menos de $\varepsilon/2$. Agreguemos a la partición T^{**} el punto t. En virtud del lema de este párrafo y de la definición de la longitud del arco, la longitud de la quebrada correspondiente a la partición obtenida T^{*} del segmento $[\alpha, \beta]$ se diferencia de $l(\beta)$ en menos de $\varepsilon/2$, y esta quebrada tiene por su vértice el punto M de la curva que corresponde al punto t del segmento $[\alpha, \beta]$.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN 2). Ya que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$ son uniformemente continuas en este segmento, entonces, según $\varepsilon > 0$ dado se puede indicar un $\delta > 0$ tal que para cualquier partición T del segmento $[\alpha, \beta]$ con las longitudes de los segmentos parciales $[t_{i-1}, t_i]$ menores de δ se cumplen las desigualdades $|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$, $|\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$. Puesto que la longitud $\bar{l}_i$ del tramo de la quebrada correspondiente a la partición dada es igual a

$$\sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2},$$

entonces, obviamente, $\bar{l}_i < \varepsilon/2$. Consideremos ahora cualquier partición fijada T' del segmento $[\alpha, \beta]$ con las longitudes de los segmentos parciales menores de δ, y agreguemos a ella los puntos de la partición T^{*} (véase la demostración de la afirmación 1). Como resultado, obtenemos la partición T a la cual corresponde una quebrada inscrita en la curva L y que satisface todas las condiciones de la afirmación 2).

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN 3). Sea que la quebrada $M_0M_1 \ldots \ldots M_{k-1}M_kM_{k+1} \ldots M_n$ satisface las condiciones de las afirmaciones 1) y 2). Cerciorémonos de que la longitud de cada parte de la curva L subtendida por cualquier tramo de la quebrada considerada es menor de ε. En efecto, sea l_k longitud de la parte $M_{k-1}M_k$ de la curva L y sea $\bar{l}_k$ longitud del tramo $M_{k-1}M_k$ de la quebrada. Entonces, en virtud de las condiciones de la afirmación 1), se cumple la desigualdad $\sum_{k=1}^{n} (l_k - \bar{l}_k) < \varepsilon/2$. Puesto que todo sumando $l_k - \bar{l}_k$ de la última suma es no negativo, entonces $(l_k - \bar{l}_k) < \varepsilon/2$. De aquí y de la desigualdad $\bar{l}_k < \varepsilon/2$ se desprende la desigualdad requerida $l_k < \varepsilon$.

El concepto de longitud del arco de una curva espacial dada por las ecuaciones paramétricas (2.5) se introduce de manera completamente análoga al concepto del arco de una curva plana. Se consideran

las longitudes $\overline{l}(t_i)$ de las quebradas inscritas en la curva L con tal que, obviamente

$$l(t_i)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2+[\chi(t_i)-\chi(t_{i-1})]^2}.$$

La curva espacial L determinada por las ecuaciones (2.5) se denomina *rectificable* si el conjunto $\{l(t_i)\}$ de las longitudes de las quebradas inscritas en esta curva está acotado. La cota superior exacta l de este conjunto se denomina longitud del arco de la curva L.

Notemos que las curvas espaciales rectificables poseen las propiedades 1°, 2°, 3° y 4° enumeradas en este punto. La demostración de estas propiedades se realiza de modo completamente análogo a la demostración para las curvas planas.

5. Condiciones suficientes de la rectificabilidad de la curva. Fórmulas para calcular las longitudes del arco de la curva.

Teorema 2.1. *Si las funciones* $x=\varphi(t)$ *e* $y=\psi(t)$ *tienen derivadas continuas en el segmento* $[\alpha, \beta]$, *entonces la curva* L *determinada por las ecuaciones paramétricas* (2.3) *es rectificable y la longitud* l *de su arco puede calcularse por la fórmula*

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{2.10}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, demostremos que la curva L es rectificable. Para hacerlo, transformemos la expresión (2.6) de la longitud $\overline{l}(t_i)$ de la quebrada inscrita en la curva L y correspondiente a una partición arbitraria T del segmento $[\alpha, \beta]$. Ya que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen derivadas en el segmento $[\alpha, \beta]$, entonces conforme a la fórmula de Lagrange, $\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$, donde $t_{i-1}<\tau_i<t_i$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ y $\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=\psi'(\tau_i^*)\Delta t_i$ donde $t_{i-1}<\tau_i^*<t_i$. Poniendo las expresiones halladas para $\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})$ y $\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})$ en el miembro derecho de la expresión (2.6), obtenemos

$$l(t_i)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i^*)}\,\Delta t_i. \tag{2.11}$$

Según la condición, las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen derivadas continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$. Por consiguiente, las derivadas están acotadas y, por eso, existe un M tal que para todos los t del segmento $[\alpha, \beta]$ son válidas las desigualdades $|\varphi'(t)|\leqslant M$ y $|\psi'(t)|\leqslant M$. Pero, entonces, de la fórmula (2.11) se desprende que

$$0<l(t_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt{M^2+M^2}\,\Delta t_i=M\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=M\sqrt{2}(\beta-\alpha).$$

De este modo, el conjunto $\{l(t_i)\}$ de las longitudes de las quebradas inscritas en la curva L y correspondientes a todas las particiones posibles T del segmento $[\alpha, \beta]$, está acotado, o sea, *la curva L es rectificable*. Mediante l denotemos la longitud de esta curva. Demostremos que la longitud l de la curva L puede calcularse por la fórmula (2.10). Observemos que el miembro derecho de la fórmula (2.11) parece a la suma integral

$$I\{t_i, \tau_i\}=\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,\Delta t_i \qquad (2.12)$$

de la función integrable $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ con tal que esta suma $I\{t_i, \tau_i\}$ corresponde a la partición T del segmento $[\alpha, \beta]$ y la elección dada de los puntos τ_i en los segmentos parciales $[t_{i-1}, t_i]$ de esta partición. *Demostremos que para cualquier $\varepsilon>0$ positivo se puede indicar un $\delta>0$ tal para que $\Delta<\delta$ ($\Delta=\max \Delta t_i$) se cumple la desigualdad*

$$|l(t_i)-I|<\varepsilon/2, \qquad (2.13)$$

donde $I=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$ es el límite de las sumas integrales (2.12) cuando $\Delta\to 0$. En otras palabras, *demostremos que para particiones bastante «finas» T del segmento $[\alpha, \beta]$ las longitudes $l(t_i)$ de las quebradas, inscritas en la curva L y correspondientes a estas particiones, se diferencian en una magnitud tan pequeña como se quiera de la integral I* que está en el miembro derecho de la fórmula (2.10). Notemos, primero, que

$$\left|\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i^*)}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)|\leqslant M_i-m_i \;^{*)}, \qquad (2.14)$$

donde M_i y m_i son cotas exactas de la función $\psi'(t)$ en el segmento parcial $[t_{i-1}, t_i]$. En virtud de (2.11), (2.12) y (2.14) son válidas las

*) Para obtener las desigualdades (2.14), hemos empleado la desigualdad $|\sqrt{a^2+b^{*2}}-\sqrt{a^2+b^2}|\leqslant|b^*-b|$, donde $a^2=\varphi'^2(\tau_i)$, $b^{*2}=\psi'^2(\tau_i^*)$ y $b^2=\psi'^2(\tau_i)$, y la desigualdad $|\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)|\leqslant M_i-m_i$.

La segunda de estas desigualdades es evidente puesto que la diferencia de cualesquiera valores de la función no es mayor que la diferencia de sus cotas exactas. Demostremos la primera de dichas desigualdades. Tenemos

$$|\sqrt{a^2+b^{*2}}-\sqrt{a^2+b^2}|=\frac{|b^{*2}-b^2|}{\sqrt{a^2+b^{*2}}+\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\frac{|b^*-b|\,|b^*+b|}{\sqrt{b^{*2}}+\sqrt{b^2}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|b^*-b|\,(|b^*|+|b|)}{|b^*|+|b|}=|b^*-b|.$$

desigualdades

$$|\,l(t_i)-I\{t_i,\ \tau_i\}\,|=\Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i^*)}-$$

$$-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\Big)\Delta t_i\Big|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big|\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i^*)}-$$

$$-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\Big|\Delta t_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta t_i=S-s. \quad (2.15)$$

donde S y s son las sumas superior e inferior de la función $\psi'(t)$ para la partición del segmento $[\alpha,\ \beta]$. Ya que las funciones $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ y $\psi'(t)$ son integrables en el segmento $[\alpha,\ \beta]$ (esto se desprende de la continuidad de las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ en el segmento $[\alpha,\ \beta]$), entonces, de la definición de la integrabilidad y del teorema 1.1 (véase el § 1 y el § 3 del cap. 1) se desprende que para cualquier $\varepsilon>0$ se puede indicar un $\delta>0$ tal que para $\Delta<\delta$ ($\Delta=\max\Delta t_i$) se cumplen las desigualdades

$$|\,I\{t_i,\ \tau_i\}-I\,|<\varepsilon/4 \text{ y } S-s<\varepsilon/4. \quad (2.16)$$

Por eso, cuando $\Delta<\delta$, en virtud de (2.15) y (2.16), son válidas las desigualdades $|\,l(t_i)-I\,|=|\,l(t_i)-I\{t_i,\ \tau_i\}+I\{t_i,\ \tau_i\}-I\,|\leqslant|\,l(t_i)-I\{t_i,\ \tau_i\}\,|+|\,I\{t_i,\ \tau_i\}-I\,|<\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2$. De este modo, la validez de las desigualdades (3.12) queda demostrada.

Demostremos ahora que *entre todas las quebradas posibles cuyas longitudes* $\bar{l}(t_i)$ *satisfacen la desigualdad* (2.13) *existen quebradas cuyas longitudes se diferencian de la longitud* l *del arco de la curva* L *en menos de* $\varepsilon/2$.

Puesto que l es cota superior exacta del conjunto $\{l(t_i)\}$ de las longitudes de las quebradas inscritas en la curva L y correspondientes a todas las particiones posibles del segmento $[\alpha,\ \beta]$, entonces existe una partición T^* de este segmento tal que la longitud $l^*(t_i)$ de la quebrada correspondiente satisface las desigualdades

$$0\leqslant l-l^*(t_i)<\varepsilon/2. \quad (2.17)$$

Dividamos ahora cada uno de los segmentos parciales $[t_{i-1},\ t_i]$ de la partición T^* en partes tan pequeñas que la longitud máxima Δ de la partición T del segmento $[\alpha,\ \beta]$, que se obtiene uniendo dichas particiones, sea menor de δ, $\Delta<\delta$. Es obvio que la longitud $\bar{l}(t_i)$ de la quebrada correspondiente a la partición T satisface la desigualdad (2.13). Ya que los vértices de la quebrada correspondiente a la partición T^* son también vértices de la quebrada correspondiente a la partición T, entonces, conforme al lema de este párrafo, la longitud $l(t_i)$ satisface las desigualdades $0<l^*(t_i)\leqslant\bar{l}(t_i)\leqslant l$,

y, por eso, en virtud de la desigualdad (2.17), se cumple la desigualdad

$$0 \leqslant l - l(t_i) < \varepsilon/2. \qquad (2.18)$$

Así pues, hemos demostrado que entre las quebradas cuyas longitudes $l(t_i)$ satisfacen la desigualdad (2.13) hay quebradas cuyas longitudes $l(t_i)$ satisfacen la desigualdad (2.18). Comparando las desigualdades (2.13) y (2.18), obtenemos la siguiente desigualdad:

$$|l - I| < \varepsilon.$$

En virtud de la arbitrariedad de ε, de aquí se desprende que $l = I$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. *Si las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen derivadas acotadas en el segmento $[\alpha, \beta]$, entonces, la curva L determinada por las ecuaciones* (2.1) *es rectificable.* En efecto, demostrando el teorema (2.1), hemos establecido que si las derivadas de las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son acotadas, entonces las longitudes $l(t_i)$ de las quebradas inscritas en la curva L y correspondientes a todas las particiones posibles T del segmento $[\alpha, \beta]$ son acotadas también.

OBSERVACIÓN 2. *La fórmula* (2.10) *para calcular la longitud del arco es válida si las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ están definidas y son integrables en el segmento* $[\alpha, \beta]$. En efecto, de la integrabilidad de estas derivadas se desprende su acotación y, por eso, en virtud de la observación 1, la rectificabilidad de la curva L. Luego observemos que para deducir las desigualdades (2.14), (2.15) y (2.16), y, por consiguiente, la desigualdad (2.13), es suficiente que existan y sean integrables las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ puesto que, según el complemento 1 del capítulo 1, de aquí se desprende la integrabilidad de la función $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$. Todos los razonamientos ulteriores se hacen como en la demostración del teorema 2.1.

OBSERVACIÓN 3. *Si la curva L es gráfica de la función $y = f(x)$ que tiene derivada continua $f'(x)$ en el segmento $[a, b]$, entonces la curva L es rectificable y la longitud l del arco L puede hallarse por la fórmula*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (2.19)$$

Para demostrarlo, observemos que la gráfica de la función considerada es curva determinada por las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = f(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ y, además, es evidente que se cumplen todas las condiciones del teorema 2.1. Por lo tanto, poniendo en la fórmula (2.10) $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = f(t)$ y sustituyendo la variable de integración t por x, obtenemos la fórmula (2.19). Señalemos también que si la curva L es determinada por la ecuación polar $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ y la función $r(\theta)$ tiene derivada continua en el segmento $[\theta_1, \theta_2]$, entonces la curva L es rectificable y la longitud l del arco L puede hallarse por la fórmula

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta. \qquad (2.20)$$

Para demostrarlo, nos valemos de las fórmulas que se emplean para pasar de las coordenadas polares a las cartesianas

$$x = r(\theta)\cos\theta, \quad y = r(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

De este modo, se ve que la curva L se determina por las ecuaciones paramétricas con tal que las funciones $\varphi = r(\theta)\cos\theta$ y $\psi = r(\theta)\operatorname{sen}\theta$ satisfacen las condiciones del teorema 2.1. Poniendo dichos valores φ y ψ en (2.10), obtenemos la fórmula (2.20).

Enunciemos las condiciones suficientes de la rectificabilidad de la curva espacial.

Si las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$ y $\chi(t)$ tienen derivadas continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$, entonces, la curva L determinada por las ecuaciones (2.5) *es rectificable y la longitud l de su arco puede hallarse empleando la fórmula*

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt. \tag{2.21}$$

Su demostración es análoga a la del teorema 2.1.

OBSERVACIÓN 4. Si las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$ y $\chi(t)$ tienen derivadas acotadas en el segmento $[\alpha, \beta]$, entonces, la curva L determinada por las ecuaciones (2.5) es rectificable. Si, además, las derivadas de dichas funciones son integrables en el segmento $[\alpha, \beta]$, entonces la longitud l del arco de la curva L puede hallarse empleando la fórmula (2.21) (véase las observaciones 1 y 2).

6. Diferencial de un arco. Sea que las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ tienen derivadas continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$. En este caso, conforme al teorema 2.1, el arco variable se representa por la fórmula:

$$l(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)}\, d\tau. \tag{2.22}$$

Ya que la función subintegral del miembro derecho de la fórmula (2.22) es continua, entonces la función $l(t)$ es diferenciable con tal que

$$l'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

(véase el p. 1 del § 7, cap. 1, tomo 2). Elevando ambos miembros de la última igualdad al cuadrado y multiplicando, después, por dt^2, obtenemos la fórmula

$$[l'(t)\, dt]^2 = [\varphi'(t)\, dt]^2 + [\psi'(t)\, dt]^2. \tag{2.23}$$

Ya que $l'(t)\, dt = dl$, $\varphi'(t)\, dt = dx$, $\psi'(t)\, dt = dy$, entonces, de (2.23) hallamos

$$dl^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2.24}$$

En particular, de la fórmula (2.24) se desprende que si elegimos el arco variable l como parámetro, o sea, $x = g(l)$ e $y = h(l)$, entonces

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 = 1. \qquad (2.25)$$

Notemos que si se observa la condición de continuidad de las derivadas de las funciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ y $z = \varkappa(t)$, para la diferencial dl del arco de una curva espacial determinada por las ecuaciones paramétricas (2.5), es válida la fórmula

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (2.26)$$

De la fórmula (2.26) se desprende que si elegimos el arco variable l como parámetro, entonces

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dl}\right)^2 = 1. \qquad (2.27)$$

7. Ejemplos para calcular la longitud del arco. 1°. Longitud del arco de la cicloide *) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. En el caso considerado $\varphi' = a(1 - \cos t)$, $\psi' = a \operatorname{sen} t$. Por lo tanto, según la fórmula (2.10),

$$l = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt =$$
$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

2°. Se llama *línea catenaria* la gráfica de la función $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ **). Hallemos la longitud de una parte de la línea catenaria que corresponde al segmento $[0, x]$. Por la fórmula (2.19), tenemos

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)}\, d\xi = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{\xi}{a}}\, d\xi = \int_0^x \operatorname{ch}\frac{\xi}{a}\, d\xi = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

3°. Hallemos el arco variable de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, partiendo del punto $M_0(0, b)$. Consideremos las ecuaciones paramétricas de la elipse $x = a\operatorname{sen} t$, $y = b\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Según la

---

*) *Cicloide* es una curva plana que describe un punto de la circunferencia de radio a cuando ésta rueda sin deslizarse por la línea recta.

**) La denominación *línea catenaria* se debe a que una cadena pesada suspendida por sus extremos tiene forma de la curva considerada.

fórmula (2.22), tenemos

$$l(t)=\int_0^t \sqrt{\varphi'^2(\tau)+\psi'^2(\tau)}\,d\tau=\int_0^t \sqrt{a^2\cos^2\tau+b^2\operatorname{sen}^2\tau}\,d\tau=$$

$$=a\int_0^t \sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\tau}\,d\tau=aE(e,\ t).$$

El número $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ se denomina excentricidad de la elipse. La integral indefinida $\int \sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt$ que se anula cuando $t=0$, se denomina integral elíptica de segundo género y se denota por $E(e,t)$ (véase el § 11, cap. 7, tomo 1).

§ 2. Área de una figura plana*)

1. Concepto de cuadrabilidad de una figura plana. Área de una figura plana cuadrable. El concepto de área del polígono **) que es una figura plana se conoce del curso de matemáticas elementales. En el presente punto introduciremos el concepto de área de una *figura plana* Q que es una parte del plano limitada por una curva cerrada L ***). Además, la curva L se denominará frontera de la figura Q.

Diremos que el polígono *está inscrito* en la figura Q, si todo punto de este polígono pertenece a la figura Q o a su frontera. Si todos los puntos de una figura plana y de su frontera pertenecen a cierto polígono, diremos que dicho polígono *está circunscrito* alrededor de la figura Q.

Es obvio que el área de cualquier polígono inscrito en la figura Q no es mayor que el área de cualquier polígono circunscrito alrededor de la figura Q.

Sea $\{S_i\}$ el conjunto numérico de las áreas de los polígonos inscritos en la figura Q y sea $\{S_d\}$ el conjunto numérico de las áreas de polígonos circunscritos alrededor de la figura Q. Evidentemente, el conjunto $\{S_i\}$ está acotado superiormente (por el área de cualquier polígono circunscrito alrededor de la figura Q), y el conjunto $\{S_d\}$ está acotado inferiormente (por ejemplo, por el número cero). Deno-

*) En el tomo 3 del presente curso el lector hallará una amplia aplicación de los conceptos de área de una figura plana y de conjunto arbitrario de los puntos del plano.

**) Se llamará *polígono* a la parte del plano limitada por una línea quebrada cerrada simple.

***) Señalemos que una curva plana cerrada simple divide el plano en dos partes, interior y exterior. Jordan, matemático francés (1838—1922), demostró esta afirmación.

temos la cota superior exacta del conjunto $\{S_i\}$ mediante $\underline{P}$ y la cota inferior exacta del conjunto $\{S_d\}$, mediante $\overline{P}$. Los números $\underline{P}$ y $\overline{P}$ *se denominan áreas inferior y superior de la figura Q*. Notemos que el área inferior $\underline{P}$ de la figura Q no es mayor que el área superior de esta figura, es decir, $\underline{P} \leqslant \overline{P}$. En efecto, supongamos que es válida la desigualdad contraria $\underline{P} > \overline{P}$. Entonces, tomando $\frac{\underline{P} - \overline{P}}{2} = \varepsilon > 0$ y teniendo en cuenta la definición de las cotas exactas, hallamos tal polígono inscrito en la figura Q que su área S_i sea mayor que el número $\underline{P} - \varepsilon = \frac{\underline{P} + \overline{P}}{2}$, o sea $\frac{\underline{P} + \overline{P}}{2} < S_i$, y tal polígono circunscrito alrededor de la figura Q que su área S_d sea menor que el número $\overline{P} + \varepsilon = \frac{\underline{P} + \overline{P}}{2}$, o sea, $S_d < \frac{\underline{P} + \overline{P}}{2}$. Comparando las dos desigualdades obtenidas, hallamos que $S_d < S_i$, lo que es imposible, puesto que el área S_d de cualquier polígono circunscrito es *no menor* que el área S_i de cualquier polígono inscrito.

Introduzcamos el concepto de cuadrabilidad de una figura plana.

Definición. *La figura plana Q se denomina cuadrable si el área superior de ésta coincide con su área inferior $\underline{P}$. Además, el número $P = \underline{P} = \overline{P}$ se denomina área de la figura Q.*

OBSERVACIÓN. En el complemento de este capítulo aduciremos el ejemplo de una figura no cuadrable.

Es válido el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Para que la figura plana Q sea cuadrable, es necesario y suficiente que para cualquier número positivo ε se pueda indicar un polígono circunscrito alrededor de la figura Q y un polígono inscrito en la figura Q tales que su diferencia sea menos que ε, $S_d - S_i < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. 1) NECESIDAD. Sea la figura Q cuadrable, es decir, que $\underline{P} = \overline{P} = P$. Dado $\underline{P}$ y $\overline{P}$ son las cotas superior e inferior exactas de los conjuntos $\{S_i\}$ y $\{S_d\}$, para cualquier número $\varepsilon > 0$, se puede indicar un polígono inscrito en la figura Q tal que su área S_i se diferencia de $\underline{P} = P$ en menos de $\varepsilon/2$, es decir, $P - S_i < \varepsilon/2$. Para este mismo $\varepsilon > 0$ se puede indicar un polígono circunscrito, tal que su área S_d se diferencia de $\overline{P} = P$ en menos de $\varepsilon/2$, es decir, $S_d - P < \varepsilon/2$. Sumando las desigualdades obtenidas, hallamos que $S_d - S_i < \varepsilon$.

2) SUFICIENCIA. Sean S_d y S_i las áreas de los polígonos para los cuales $S_d - S_i < \varepsilon$. Dado que $S_i \leqslant \underline{P} \leqslant \overline{P} \leqslant S_d$, tenemos $\overline{P} - \underline{P} < \varepsilon$. En virtud de la arbitrariedad de ε, de aquí se desprende que $\underline{P} = \overline{P}$. De este modo, la figura es cuadrable. El teorema queda demostrado.

Diremos que *la frontera de la figura plana Q tiene un área igual a cero*, si para cualquier número positivo $\varepsilon > 0$ se puede indicar un polígono circunscrito alrededor de la figura Q y un polígono inscrito en la figura Q, tales que la diferencia $S_d - S_i$ sea menor de ε. Obviamente, el teorema 2.2. puede enunciarse también del modo siguiente.

Para que la figura plana Q sea cuadrable, es necesario y suficiente que su frontera tenga un área igual a cero.

OBSERVACIÓN. En todos los razonamientos aducidos, en vez de la figura plana se puede considerar un conjunto arbitrario de puntos del plano.

Establezcamos el criterio suficiente de la cuadrabilidad de una figura plana.

Teorema 2.3. *Si la frontera L de la figura plana Q es una curva rectificable, la figura Q es cuadrable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea l^* la longitud de la curva L. Consideramos que la curva L está parametrizada mediante el parámetro natural l, $0 \leqslant l \leqslant l^*$, y, además, debido a que la curva L es cerrada, sus puntos de frontera, correspondientes a los valores 0 y l^* del parámetro l, coinciden. Sea ε un número positivo arbitrario. Dividamos el segmento $[0, l^*]$ en n partes iguales de longitud inferior a $\varepsilon/9l^*$ mediante los puntos $0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_n = l^*$. Consideremos la quebrada $M_0M_1 \ldots M_n$ ($M_0 = M_n$) inscrita en la curva L y correspondiente a dicha partición del segmento $[0, l^*]$. Los puntos $M_0, M_1, \ldots, M_n$ dividen la curva L en las partes $L_1, L_2, \ldots, L_n$, cuyas longitudes son iguales a $(l^*/n) < (\varepsilon/9l^*)$. Es obvio que las longitudes de los tramos $M_{i-1}M_i$ de la quebrada anteriormente indicada $M_0M_1 \ldots M_n$ no es superior a l^*/n. Coloquemos todo tramo $M_{i-1}M_i$ dentro de un cuadrado con longitud de lado igual a $3l^*/n$ del modo indicado en la fig. 2.4.

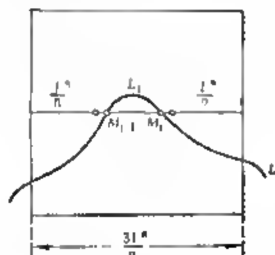


Fig. 2.4

Es fácil convencerse de que el arco L_i subtendido por el tramo $M_{i-1}M_i$ se encuentra dentro de este cuadrado puesto que la distancia de cualquier punto que se halla fuera o en la frontera de este cuadrado hasta cada uno de los puntos M_{i-1} y M_i no es inferior a l^*/n. Por tanto, si algún punto M del arco L_i se encontrara fuera o en la frontera de dicho cuadrado, la quebrada $M_{i-1}MM_i$ inscrita en este arco tendría una longitud no menor que $2l^*/n$, o sea, mayor que la longitud l^*/n del arco L_i, lo cual es imposible. La unión de todos los cuadrados construidos sobre todos los tramos de la quebrada $M_0M_1 \ldots M_n$ representa una figura poligonal que comprende la curva L. Además, es obvio que la frontera de esta figura es la unión de las fronteras del polígono inscrito en la figura Q y del polígono circunscrito alrededor de Q. Es también evidente que la diferencia $S_d - S_i$ de las áreas de los polígonos es igual al área de dicha figura y el área de esta figura no supera la suma S de las áreas de los cuadrados anteriormente descritos. Ya que $S = n\dfrac{9l^{*2}}{n^2} = 9l^*\dfrac{l^*}{n} < \varepsilon$ (la última desigualdad se desprende de la expresión $\dfrac{l^*}{n} < \dfrac{\varepsilon}{9l^*}$), entonces $S_d - S_i < \varepsilon$. Por eso, según el teorema 2.2, la figura Q es cuadrable. El teorema queda demostrado.

2. **Área del trapecio curvilíneo.** Se llama trapecio curvilíneo a la figura limitada por la gráfica de una función continua y no negativa $f(x)$ prefijada en el segmento $[a, b]$, por las ordenadas trazadas en los puntos a y b y por el segmento del eje Ox entre los puntos a y b (fig. 2.5). Demostremos la siguiente afirmación.

El trapecio curvilíneo es una figura cuadrable, cuya área P puede calcularse por la fórmula

$$P = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2.28)$$

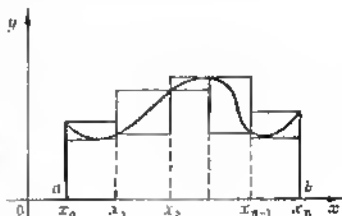


Fig. 2.5

DEMOSTRACIÓN. Ya que la función continua en el segmento $[a, b]$ es integrable, para cualquier número positivo ε se puede indicar una partición T del segmento $[a, b]$ tal que la diferencia $S - s < \varepsilon$, donde S y s son, respectivamente, las cotas superior e inferior de la partición T. Pero S y s son iguales a S_d y S_i, respectivamente, donde S_d y S_i son las áreas de las figuras escalonadas (polígonos), la primera de las cuales comprende el trapecio curvilíneo y la segunda se contiene en el trapecio curvilíneo (la fig. 2.5 representa dichas figuras escalonadas). Dado que $S_d - S_i < \varepsilon$ entonces, conforme al teorema 2.2, el trapecio curvilíneo es cuadrable. Puesto que el límite de las cotas superiores e inferiores para $\Delta \to 0$ es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$ y $s \leqslant P \leqslant S$, entonces el área P del trapecio curvilíneo puede hallarse por la fórmula (2.28).

OBSERVACIÓN. Si la función $f(x)$ es continua y no positiva en el segmento $[a, b]$, el valor de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área del trapecio curvilíneo tomada con el signo negativo y limitada por la gráfica de la función $f(x)$, las ordenadas de los puntos a y b y el segmento del eje Ox entre los puntos a y b. Por eso, si $f(x)$ cambia de signo, $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual a la suma de áreas, tomadas con un signo determinado, de los trapecios curvilíneos que se encuentran por encima o por debajo del eje Ox con tal de que las áreas de los primeros se tomen con el signo $+$ y los de los segundos, con el signo $-$.

3. **Área del sector curvilíneo.** Sea la curva L dada en el sistema polar por la ecuación $r = r(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ (fig. 2.6) con tal de que la función $r(\theta)$ sea continua y no negativa en el segmento $[\alpha, \beta]$. La

figura plana, limitada por la curva L y dos rayos que forman los ángulos α y β con el eje polar, se denominará *sector curvilíneo*.

Demostremos la siguiente afirmación. *El sector curvilíneo es una figura cuadrable, cuya área P puede calcularse por la fórmula*

$$P=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,d\theta. \qquad (2.29)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la partición T del segmento $[\alpha, \beta]$ por los puntos $\alpha=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_n=\beta$ y para todo segmento parcial $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ construyamos sectores circulares, cuyos radios son iguales a r_i mínimo y a R_i máximo de los valores $r(\theta)$ en el segmento $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. Como resultado obtenemos dos figuras en forma de abanico, la primera de las cuales se comprende dentro del sector curvilíneo y la segunda comprende el sector curvilíneo (estas figuras en forma de abanico se representan en la fig. 2.6).

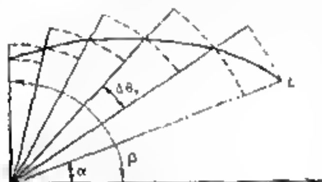


Fig. 2.6

Las áreas $\overline{S}_i$ y $\overline{S}_d$ de dichas figuras de abanico son respectivamente iguales a $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2\Delta\theta_i$ y a $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} R_i^2\Delta\theta_i$. Notemos que la primera de estas sumas es la suma inferior s de la función $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ con la partición T del segmento $[\alpha, \beta]$, y la segunda, la suma superior de la misma función con la misma partición. Ya que la función $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ es integrable en el segmento $[\alpha, \beta]$, la diferencia $S-s=\overline{S}_d-\overline{S}_i$ puede ser tan pequeña como se quiera. Por ejemplo, para cualquier $\varepsilon>0$ fijado esta diferencia puede hacerse menor que $\varepsilon/2$. Inscribamos ahora en la figura interior en forma de abanico el polígono Q_i de área S_i, para el cual $\overline{S}_i-S_i<\frac{\varepsilon}{4}$, y circunscribamos alrededor de la figura exterior en forma de abanico el polígono Q_d de área S_d, para el cual $S_d-\overline{S}_d<\frac{\varepsilon}{4}$ *). Obviamente, el primero de estos polígonos está inscrito en el sector curvilíneo y el segundo, circunscrito alrede-

*) Las figuras consideradas en forma de abanico se componen de sectores circulares. Todo sector es cuadrable, y, por tanto, son también cuadrables las figuras en forma de abanico. Por eso, para estas figuras pueden hallarse los polígonos cuyas áreas S_i y S_d satisfacen las desigualdades indicadas.

dor de él. Dado que son válidas las desigualdades

$$S_i < \bar{S}_i \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\, d\theta < \bar{S}_d < S_d, \qquad (2.30)$$

resulta evidente que $S_d - S_i < \varepsilon$. En virtud de la arbitrariedad de ε, de esta expresión se desprende la cuadrabilidad del sector curvilíneo. De las desigualdades (2.30) se deduce la validez de la fórmula (2.29).

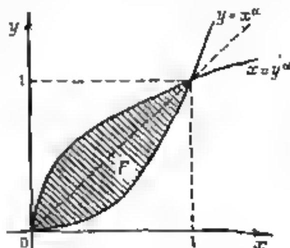


Fig. 2.7

4. Ejemplos para calcular las áreas. 1°. Hállese el área P de la figura F limitada por las gráficas de las funciones $y=x^{\alpha}$ y $x=y^{\alpha}$ $\alpha \geq 1$ (fig. 2.7). Debido a que la figura F es simétrica respecto a la bisectriz del primer ángulo de coordenadas, su área puede obtenerse sustrayendo de 1 (área del cuadrado) el área doble del trapecio curvilíneo determinado por la gráfica de la función $y=x^{\alpha}$ en el segmento $[0, 1]$. De este modo, por la fórmula (2.28).

$$P = 1 - 2\int_0^1 x^{\alpha}\, dx = 1 - 2\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$

2°. Por tres puntos de coordenadas $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) pasa una sola parábola $y = Ax^2 + Bx + D$ (o una recta si los puntos se encuentran en una línea recta). En efecto, el sistema de ecuaciones respecto a A, B, D *)

$$\left.\begin{aligned} Ah^2 - Bh + D &= y_0, \\ D &= y_1, \\ Ah^2 + Bh + D &= y_2 \end{aligned}\right\}$$

tiene una solución única. A saber:

$$A = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}, \quad B = \frac{y_2 - y_0}{2h}, \quad D = y_1.$$

Empleando las ordenadas y_0, y_1 e y_2 expresemos el área P del trapecio curvilíneo, determinado por dicha parábola, las ordenadas de los puntos $(-h, 0)$ y $(h, 0)$ y el segmento del eje Ox entre estos pun-

*) Estas ecuaciones son condiciones de que los puntos $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2) pertenecen a la parábola $y = Ax^2 + Bx + D$.

tos (fig. 2.8). Ya que, según la fórmula (2.28),

$$P=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+D)\,dx=\left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Dx\right]\Big|_{-h}^{h}=\frac{2Ah^3}{2}+2Dh.$$

teniendo en cuenta las expresiones de A y D, hallamos

$$P=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

3°. Hállese el área P del trébol que tiene $r=a\cos 3\theta$ (fig. 2.9). Del dibujo se ve que toda la superficie del trébol es igual al área de

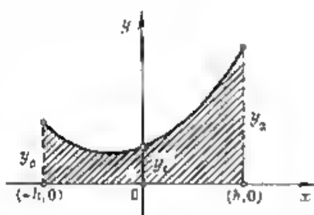


Fig. 2.8

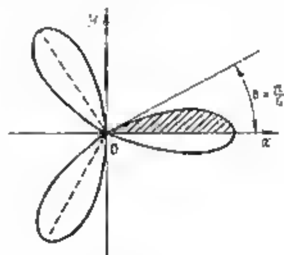


Fig. 20.

la parte rayada multiplicada por seis que corresponde a la variación de θ desde 0 hasta $\pi/6$. Por eso, según la fórmula (2.9),

$$P=6\,\frac{a^2}{2}\int_{0}^{\pi/6}\cos^2 3\theta\,d\theta=\frac{\pi a^2}{4}.$$

§ 3. Volúmenes de los cuerpos y áreas de las superficies

1. Conceptos de cubicabilidad y de volumen. Sea U un cuerpo finito *). Consideremos todos los poliedros posibles inscritos en dicho cuerpo y todos los poliedros posibles circunscritos alrededor de él. El cálculo del volumen del poliedro se reduce a calcular los volúmenes de los tetraedros (pirámides triangulares). Por eso, consideremos que el concepto de volumen del poliedro es conocido.

Sea $\{V_i\}$ el conjunto numérico de los volúmenes de los poliedros inscritos en el cuerpo E y $\{V_d\}$ el conjunto numérico de los volúmenes de los poliedros circunscritos alrededor de E. El conjunto $\{V_i\}$ está acotado superiormente (por el volumen de cualquier poliedro circunscrito), y el conjunto $\{V_d\}$, acotado inferiormente (por ejemplo,

*) Se denominará cuerpo a la parte del espacio, limitada por una superficie cerrada no intersecante.

mediante el número cero). Mediante $\underline{V}$ denotemos la cota superior exacta del conjunto $\{V_i\}$, y mediante $\overline{V}$, la cota inferior exacta del conjunto $\{V_d\}$. Los números $\underline{V}$ y $\overline{V}$ se denominan respectivamente volumen *inferior* y volumen *superior* del cuerpo E.

Señalemos que el volumen inferior $\underline{V}$ del cuerpo E no es mayor que el volumen superior $\overline{V}$ de este cuerpo, o sea, $\underline{V} \leqslant \overline{V}$. Para cerciorarse de que esto es válido, basta hacer unos razonamientos análogos a los hechos para la demostración de la desigualdad $\underline{P} \leqslant \overline{P}$ (véase el p. 1 del § 2).

Introduzcamos ahora el concepto de *cubicabilidad* del cuerpo.

Definición. *El cuerpo E se denomina cubicable si el volumen superior $\overline{V}$ de este cuerpo coincide con el volumen inferior $\underline{V}$. Además, el número $V = \underline{V} = \overline{V}$ se llama volumen del cuerpo E.*

Es válido el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Para que el cuerpo E sea cubicable, es necesario y suficiente que para cualquier número positivo ε se pueda indicar tal poliedro circunscrito alrededor del cuerpo E y tal poliedro inscrito en el cuerpo E que la diferencia $V_d - V_i$ de sus volúmenes sea menor que ε.* La demostración de este teorema es completamente análoga a la del teorema 2.2 (véase el p. 1 del § 2).

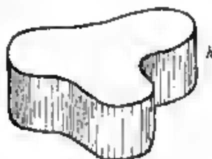


Fig. 2.10

2. Cubicabilidad de algunas clases de cuerpos. Se denominará *cilindro* al cuerpo limitado por la superficie cilíndrica con las generatrices paralelas a un eje y por dos planos perpendiculares a este eje. Intersecándose con la superficie cilíndrica, estos planos forman figuras planas llamadas *bases* del cilindro, y la distancia h entre las bases del cilindro se denomina *altura* del cilindro (fig. 2.10).

Demostremos la siguiente afirmación. *Si la base del cilindro E es una figura cuadrable Q, el cilindro es un cuerpo cubicable con tal de que el volumen V del cilindro E sea igual a Ph, donde P es el área de la base Q, y h, altura del cilindro.*

Puesto que la figura Q es cuadrable, para cualquier número positivo ε pueden indicarse tales polígonos circunscrito e inscrito en esta figura que la diferencia $S_d - S_i$ de sus áreas sea menor que ε/h. Los volúmenes V_d y V_i de las prismas de altura h, cuyas bases son los polígonos anteriormente indicados, son iguales a S_dh y S_ih, respectivamente. Por tanto, $V_d - V_i = (S_d - S_i)\,h < \frac{\varepsilon}{h}\,h = \varepsilon$. Dado que estas prismas son, respectivamente, los poliedros circuns-

crito e inscrito en el cuerpo considerado E, conforme al teorema 2.4, el cuerpo E es cubicable. Puesto que $V_i \leqslant Ph \leqslant V_d$, el volumen del cilindro es igual a Ph.

De la afirmación demostrada se desprende la *cubicabilidad de los cuerpos escalonados* (se llama cuerpo escalonado a la unión de un número finito de cilindros dispuestos de tal modo que la base superior de todo cilindro anterior se halle en el mismo plano que la base inferior del cilindro posterior, véase la fig. 2.11).

OBSERVACIÓN. Es válida la siguiente afirmación evidente. *Si para cualquier número positivo ε se puede indicar un cuerpo escalonado*

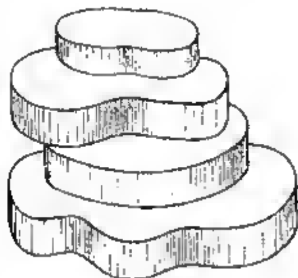


Fig. 2.11

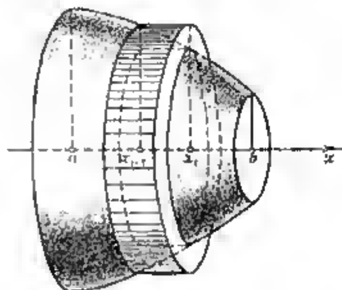


Fig. 2.12

circunscrito alrededor del cuerpo E y un cuerpo escalonado inscrito en E, tales que la diferencia $V_d - V_i$ de sus volúmenes sea menor que ε, el cuerpo E es cubicable.

Empleemos esta afirmación para demostrar la *cubicabilidad del cuerpo de revolución* (fig. 2.12). A saber, demostremos la siguiente afirmación.

Sea la función $y = f(x)$ continua en el segmento $[a, b]$. Entonces, el cuerpo E formado por revolución, alrededor del eje Ox, del trapecio curvilíneo limitado por la gráfica de la función $f(x)$, las ordenadas de los puntos a y b y por el segmento del eje Ox de a hasta b, es cubicable y su volumen V puede hallarse por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{2.31}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea T la partición del segmento $[a, b]$ por los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, y sean m_i y M_i las cotas exactas de $f(x)$ en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$. En cada uno de estos segmentos construyamos dos rectángulos de alturas m_i y M_i (la fig. 2.12

presenta estos rectángulos sólo en un segmento $[x_{i-1}, x_i]$). Obtenemos dos figuras escalonadas, una de las cuales se comprende en el trapecio curvilíneo, y la otra lo comprende. Al girar el trapecio curvilíneo y estas figuras escalonadas, obtenemos el cuerpo E y dos cuerpos escalonados, uno de los cuales se comprende en E y otro comprende E. Los volúmenes V_1 y V_d de estos cuerpos escalonados son respectivamente iguales a

$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta x_i \quad \text{y} \quad \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta x_i .$$

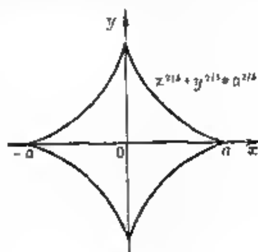


Fig. 2.13

Obviamente, estas expresiones son las sumas superior e inferior de la función $\pi f^2(x)$. Dado que esta función es integrable, para una partición T del segmento $[a, b]$, la diferencia de dichas sumas será menor que el número positivo dado ε. Por consiguiente, el cuerpo E es cubicable. Puesto que el límite de dichas sumas es igual a $\pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx$, el volumen V del cuerpo E puede hallarse por la fórmula (2.31).

3. Ejemplos para calcular los volúmenes.

1°. Volumen del cuerpo obtenido por revolución de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ alrededor del eje Ox (fig. 2.13). Como $y = (a^{2/3} - - x^{2/3})^{3/2}$, se tiene

$$V = \pi \int\limits_{-a}^{a} (a^{2/3} - x^{2/3})^3\, dx = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

2°. Volumen del cuerpo obtenido por revolución de la sinusoide alrededor del eje Ox en el segmento $[0, \pi]$. Tenemos

$$V = \pi \int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

4. Área de la superficie de revolución. Consideremos la superficie Π formada por revolución de la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en el segmento $[a, b]$ alrededor del eje Ox (fig. 2.14). Definamos el concepto de *cuadrabilidad* de la superficie de revolución Π. Sea T la partición del segmento $[a, b]$ por los puntos $a = x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = b$, y sean $A_0, A_1, \ldots, A_n$ los puntos correspondientes de la gráfica de la función $f(x)$. Construyamos la quebra-

da $A_0A_1 \ldots A_n$. Al girar esta quebrada alrededor del eje, obtenemos la superficie $\Pi(A_i)$ compuesta por las superficies laterales de los conos truncados. Mediante $P(x_i)$ denotemos el área de la superficie $\Pi(A_i)$. Si y_i son ordenadas de $f(x)$ en los puntos x_i y l_i es longitud del tramo $A_{i-1}A_i$ de la quebrada $A_0A_1 \ldots A_n$, entonces,

$$P(x_i) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2} l_i = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1}+y_i) l_i. \qquad (2.32)$$

Enunciemos las siguientes definiciones.

1°. *El número P se denomina límite de las áreas $P(x_i)$, si para cualquier número positivo dado ε se puede indicar un número positivo δ tal que, para cualquier partición T del segmento $[a, b]$ (en el cual la máxima longitud Δ de los segmentos parciales es menor que δ) se cumple la desigualdad $|P(x_i) - P| < \varepsilon$.*

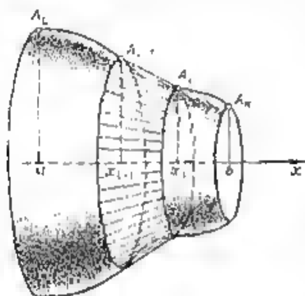


Fig. 2.14

2°. *La superficie de revolución Π se denomina cuadrable, si existe el límite P de las áreas $P(x_i)$. Además, el número P se denomina área de la superficie* Π.

Demostremos la siguiente afirmación.

Si en el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ tiene derivada continua $f'(x)$, entonces la superficie Π formada por la revolución de la gráfica de esta función alrededor del eje Ox, es cuadrable y su área puede calcularse por la fórmula

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx. \qquad (2.33)$$

DEMOSTRACIÓN. La longitud l_i del tramo $A_{i-1}A_i$ de la quebrada $A_0A_1 \ldots A_n$ es igual a $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$. Según la fórmula de Lagrange, tenemos $y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi)(x_i - x_{i-1})$. Poniendo $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, obtenemos $l_i = \sqrt{1+f'^2(\xi_i)} \times \Delta x_i$. Por tanto, según (2.32),

$$P(x_i) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i +$$
$$+ \pi \left\{ \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} - f(\xi_i)) + (y_i - f(\xi_i)) \right] \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i \right\}. \qquad (2.34)$$

En el miembro derecho de la relación (2.34), la primera suma es la suma integral de la función $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ que, en virtud de las condiciones de la afirmación que demostramos, es integrable y tiene el límite $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$. Demostremos que la expresión entre llaves en el miembro derecho de la relación (2.34) tiene límite igual a cero. En efecto, sea ε un número positivo cualquiera. Ya que la función $f(x)$ es uniformemente continua en el segmento $[a, b]$, para $\varepsilon > 0$ dado se puede indicar un $\delta > 0$ tal que para $\Delta < \delta$ ($\Delta = \text{máx}\,\Delta x_i$) se cumplen las desigualdades $|y_{i-1} - f(\xi_i)| < \varepsilon$ y $|y_i - f(\xi_i)| < \varepsilon$. Si M es el valor máximo de la función $\sqrt{1+f'^2(x)}$ en el segmento $[a, b]$, para la expresión entre llaves en el miembro derecho de la relación (2.34), obtenemos la estimación

$$\left|\left\{\sum_{i=1}^{n}[(y_{i-1}-f(\xi_i))+(y_i-f(\xi_i))]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\right\}\right| <$$

$$< 2M\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 2M(b-a)\varepsilon.$$

En virtud de la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, el límite de dicha expresión es igual a cero. Así pues, hemos demostrado la existencia del límite P de las áreas $P(x_i)$ y hemos establecido que este límite puede calcularse por la fórmula (2.33). La afirmación queda demostrada.

OBSERVACIÓN 1. La cuadrabilidad de la superficie de revolución se puede demostrar también en condiciones menos rigurosas. Es suficiente exigir que la función $f'(x)$ sea definida e integrable en el segmento $[a, b]$. De esta suposición se desprende la integrabilidad de la función $f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ (véase el complemento 1, cap. 1, tomo 2). Los razonamientos ulteriores en nada se diferencian de los razonamientos que hemos hecho para demostrar la afirmación de este punto.

OBSERVACIÓN 2. Si la superficie Π se obtiene girando alrededor del eje Ox, la curva L determinada por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, al realizar el cambio de variables bajo el signo de la integral definida en la fórmula (2.33), obtenemos la siguiente expresión para el área P de esta superficie

$$P = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad (2.35)$$

Consideremos los ejemplos de cálculo de áreas de las superficies de revolución.

1°. Hallemos el área P de la superficie de la elipsoide de revolución $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que gira alrededor del eje Ox. Consideremos primeramente el caso cuando $a > b$ (revolución alrededor del eje grande de la elipse). Dado que en

este caso $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, tomando $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$, hallamos

$$P=2\pi\int_{-a}^{a} f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=2\pi\,\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx=$$

$$=2\pi b\left(b+\frac{a}{e}\arcsin e\right).$$

Si $a<b$, poniendo $e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}$ y realizando los cálculos correspondientes, obtenemos

$$P=2\pi b\left(b+\frac{a^2}{2b}\,\frac{1}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right).$$

2°. Hallemos el área P de la superficie formada por revolución, alrededor de eje Ox, de la cicloide determinada por las ecuaciones paramétricas $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Por la fórmula (2.35), tenemos

$$P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

§ 4. Algunas aplicaciones físicas de la integral definida

1. Masa y centro de gravedad de una varilla heterogénea. Examinemos una varilla heterogénea que se encuentra en el segmento $[a, b]$ del eje Ox. Sea $\rho(x)$ la densidad lineal de la varilla *). Denotemos con T la partición del segmento $[a, b]$ por los puntos $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. En todo segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ escojamos un punto ξ_i y compongamos la suma $\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\,\Delta x_i$. Dado que todo sumando de esta suma es valor aproximado de la masa de la parte de la varilla en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, dicha suma se toma lógicamente por valor aproximado de la masa de toda la varilla. Conforme a los razonamientos anteriores, *definamos la masa M de toda la varilla como el límite de las sumas* $\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\,\Delta x_i$ *cuando* $\Delta=\max\Delta x_i$

---

*) Si Δm es la masa de la parte de la varilla que se encuentra dentro del segmento $[x, x+\Delta x]$, la relación $\Delta m/\Delta x$ se denomina *densidad lineal media* de la varilla en este segmento. Se llama densidad lineal $\rho(x)$ el límite $\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}$.

tiende a cero, es decir, como la integral $\int_a^b \rho(x)\,dx$. *De este modo,*

$$M = \int_a^b \rho(x)\,dx. \qquad (2.36)$$

Para determinar el centro de gravedad de la varilla heterogénea, empleemos la fórmula de la coordenada del centro de gravedad del sistema $\{m_i(x_i)\}$ de puntos materiales que tienen las masas m_i y se encuentran en los puntos x_i del eje Ox. A saber, la coordenada x_c del centro de gravedad del sistema $\{m_i\}$ puede hallarse por la fórmula

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i. \qquad (2.37)$$

Consideremos la partición T del segmento $[a, b]$ por los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ y calculemos la masa m_i de la parte de la varilla que se encuentra dentro del segmento $[x_{i-1}, x_i]$. Por la fórmula (2.36), tenemos $m_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)\,dx$. Aplicando la fórmula (1.13) del valor medio, obtenemos también que $m_i = \rho(\xi_i)\,\Delta x_i$. Tomando que la masa m_i está concentrada en el punto ξ_i del segmento $[x_{i-1}, x_i]$, podemos considerar la varilla heterogénea como un sistema de puntos materiales de masas m_i que se hallan en los puntos ξ_i del segmento $[a, b]$. Ya que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)\,dx = M,$$

por la fórmula (2.37), hallamos el valor aproximado de la coordenada x_c del centro de gravedad de la varilla heterogénea

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i)\,\Delta x_i}{M}. \qquad (2.38)$$

La expresión del numerador del miembro derecho de la relación (2.38) es la suma integral de la función $x\rho(x)$ en el segmento $[a, b]$. En correspondencia con los razonamientos que hemos hecho, determinemos la coordenada x_c del centro de gravedad de la varilla heterogénea

por la fórmula

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx}. \qquad (2.39)$$

2. Trabajo de una fuerza variable. Supongamos que el punto material se mueve desde el punto a en el eje Ox hasta el punto b en este mismo eje bajo la acción de la fuerza F paralela al eje Ox. Consideraremos que esta fuerza es función de x y está definida sobre el segmento $[a, b]$. Sea T la partición del segmento $[a, b]$ por los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. En cada segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ escojamos un punto ξ_i y tomemos como valor aproximado del trabajo A de la fuerza variable $F(x)$ en el segmento $[a, b]$ la expresión $\sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i$. En correspondencia con estos razonamientos preliminares, definamos el trabajo A de la fuerza variable $F(x)$ en el segmento $[a, b]$ como la integral $\int\limits_a^b F(x)\,dx$. De este modo,

$$A = \int\limits_a^b F(x)\,dx \qquad (2.40)$$

Complemento

Ejemplo de una figura no cuadrable

1. Denominemos *triángulo semiabierto* al conjunto de puntos de un triángulo, de cuya frontera*) se eliminan los puntos de sus dos lados y los vértices

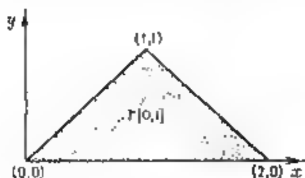


Fig. 2.15

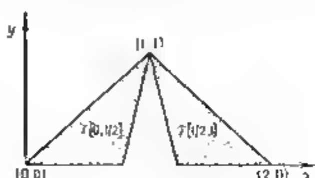


Fig. 2.16

adyacentes a estos lados. Consideremos la construcción de la curva L que será parte de la frontera de una figura no cuadrable Q. Realicemos esta construcción

*) La frontera del triángulo es el conjunto de puntos de sus lados y vértices.

eliminando sucesivamente ciertos triángulos semiabiertos de un triángulo rectángulo isósceles T dado que denotamos $T[0, 1]$, para que los razonamientos sucesivos sean más cómodos. Las coordenadas de los vértices de este triángulo

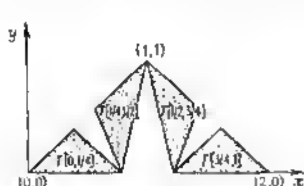


Fig. 2.17

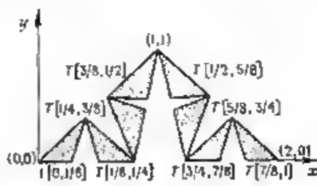


Fig. 2.18

son (0, 0), (1, 1), (2, 0) (fig. 2.15). Describamos ahora el proceso de eliminación sucesiva de los triángulos semiabiertos definidos del triángulo $T[0, 1]$:

1. Se elimina el triángulo semiabierto, un vértice del cual tiene las coordenadas (1, 1) y otros dos se encuentran en el eje Ox. El área S_1 del triángulo eliminado es igual a 1/4. La figura obtenida se representa en la fig. 2.16. Se compone de dos triángulos $T[0, 1/2]$ y $T[1/2, 1]$ cuyas áreas son iguales.

2. En el triángulo $T[0, 1/2]$ y el $T[1/2, 1]$ se elimina un triángulo, o sea en total dos cuya suma S_2 de áreas es igual a 1/8. La figura obtenida se representa en la fig. 2.17 y se compone de los cuatro triángulos $T[0, 1/4]$, $T[1/4, 1/2]$, $T]1/2, 3/4]$, $T[3/4, 1]$ cuyas áreas son iguales.

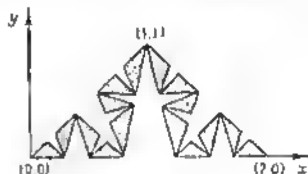


Fig. 2.19

3. De cada uno de dichos triángulos se elimina uno, o sea cuatro triángulos en total cuya suma S_3 de áreas es igual a 1/16. La figura obtenida se representa en la fig. 2.18. Se compone de los ocho triángulos:

$$T]0, 1/8], \; T[1/8, 1/4], \; T[1/4, 3/8], \; T[3/8, 1/2],$$
$$T[1/2, 5/8], \; T[5/8, 3/4], \; T[3/4, 7/8], \; T[7/8, 1],$$

cuyas áreas son iguales.

4. De cada uno de dichos triángulos se elimina uno, o sea ocho en total cuya suma de áreas es igual a 1/32. La figura obtenida se representa en la fig. 2.19. Se compone de dieciséis triángulos de áreas iguales. Cada uno de estos triángulos se denota con el símbolo

$$T\left[\frac{p}{2^4}, \; \frac{p+1}{2^4}\right], \quad p=0, \; 1, \; \ldots, \; 15$$

La eliminación sucesiva de los triángulos es evidente. Pasemos ahora a la definición de la curva L. Los triángulos $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ (p y n son cualesquiera números enteros no negativos que satisfacen la condición $p < 2^n$) obtenidos en el proceso anteriormente descrito poseen la propiedad siguiente sean $T\left[\frac{p_1}{2^{n_1}}, \frac{p_1+1}{2^{n_1}}\right]$ y $T\left[\frac{p_2}{2^{n_2}}, \frac{p_2+1}{2^{n_2}}\right]$ dos triángulos tales que

$\frac{p_1}{2^{n_1}} \leqslant \frac{p_2}{2^{n_2}} < \frac{p_2+1}{2^{n_2}} \leqslant \frac{p_1+1}{2^{n_1}}$. Entonces, el segundo de estos triángulos se comprende dentro del primero. Notemos también la siguiente propiedad evidente de los triángulos $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$: cuando $n \to \infty$ sus diámetros *) tienden a cero. Sea $\left\{T\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]\right\}$, $k = 1, 2, \ldots$, un *sistema concentrado de triángulos* (esto significa que el triángulo correspondiente al índice k comprende el triángulo correspondiente al índice $k+1$ y para $k \to \infty$ los diámetros de los triángulos tienden a cero). Todo *sistema concentrado de triángulos tiene exactamente un punto común* **). Consideremos todos los sistemas



Fig. 2.20

concentrados posibles de los triángulos anteriormente indicados. *Definamos la curva L como el conjunto {M} de todos los puntos posibles, cada uno de los cuales es punto común del sistema concentrado de los triángulos anteriormente mencionados* $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$.

Señalemos que al conjunto $\{M\}$ (a la curva L) le pertenecen los vértices de todos los triángulos $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$. Para cerciorarse de esto, observemos que el vértice de cada uno de estos triángulos pertenece al sistema concentrado de triángulos $\left\{T\left[\frac{2^k p}{2^{n+k}}, \frac{2^k p+1}{2^{n+k}}\right]\right\}$ y al sistema $\left\{T\left[\frac{2^k p-1}{2^{n+k}}, \frac{2^k p}{2^{n+k}}\right]\right\}$. Para convencerse de que el conjunto construido $\{M\}$ es una curva simple en el sentido de la definición dada en el p. 1 del § 1 del presente capítulo, debemos demostrar que todos los puntos del conjunto M se determinan por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones continuas ***).

Consideremos el segmento $[0, 1]$ del eje t. Para todo segmento $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$, siendo p y n cualesquiera números enteros no negativos $p < 2^n$, le pongamos en correspondencia el triángulo $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ ****). La fig. 2.20 presenta los segmentos correspondientes a los triángulos

*) Se llama *diámetro* del triángulo a la longitud de su lado máximo.

**) En el cap. 3 (véase el p. 2, § 3, tomo 1) hemos demostrado que el sistema concentrado de segmentos tiene exactamente un punto común. Proyectando el sistema concentrado de triángulo sobre los ejes Ox y Oy, obtenemos los sistemas concentrados de segmentos en los ejes de coordenadas. Sean, respectivamente x e y los puntos comunes de dichos sistemas concentrados de segmentos en los ejes Ox y Oy. El lector puede cerciorarse fácilmente de que el punto M de coordenadas x e y es el único punto común de dicho sistema concentrado de triángulos.

***) El hecho de que a diferentes t les corresponden puntos diferentes del conjunto M se evidencia por la construcción de la curva L.

****) Notemos que a cada uno de estos triángulos le corresponde un solo segmento $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$.

$T\left[\frac{p}{2^{s}}, \frac{p+1}{2^{s}}\right]$. Todo punto t del segmento $[0, 1]$ pertenece a todos los segmentos de un sistema concentrado $\left\{\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]\right\}$ de segmentos *). Pongamos en correspondencia con este punto t al punto común M del sistema concentrado de triángulos $\left\{T\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]\right\}$. De este modo, a todo valor t del segmento $[0, 1]$ se le ponen en correspondencia las coordenadas x e y del punto M. Por consiguiente, x e y son funciones del parámetro t. Cerciorémonos de que las funciones $x=\varphi(t)$ e $y=\psi(t)$ son continuas en el segmento $[0, 1]$. En efecto, sean ε un número cualquiera positivo dado, t, un punto dado del segmento $[0, 1]$ y M un punto de la curva L determinado por este valor del parámetro t. Del sistema concentrado de triángulos $\left\{T\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]\right\}$ que determinan el punto M elejimos un triángulo con el diámetro menor que ε y consideremos el segmento $\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]$ que comprende el punto t que determina M (y, por consiguiente, x e y). Todos los puntos de la curva L determinados por los valores t de este segmento se encuentran en el triángulo anteriormente mencionado y, por tanto, sus coordenadas se diferencian de las del punto M en no más de ε. Pero, esto significa que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son continuas en dicho punto.

2. Pasemos a la construcción de la figura no cuadrable Q. Consideremos el cuadrado $\underline{Q}$ cuyo lado es igual a 2. Sobre cada lado de este cuadrado construyamos triángulos rectángulos isósceles T_1, T_2, T_3, T_4. Como resultado, obtenemos el cuadrado $\bar{Q}$ de lado $2\sqrt{2}$ (fig. 2.21). Luego, de cada uno de estos triángulos eliminemos los triángulos semiabiertos del modo descrito anteriormente (en el p. 1).

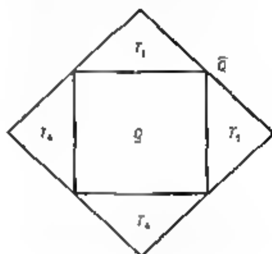


Fig. 2.21

Como resultado, obtenemos la figura Q limitada por la curva cerrada compuesta por cuatro curvas congruentes **) a la curva L (véase el p. 1). Demostremos que la figura obtenida Q no es cuadrable. Consideremos dos sucesiones especiales de polígonos $\{\underline{Q}_n\}$ y $\{\bar{Q}_n\}$, la primera de las cuales se compone de los polígonos inscritos en la figura Q y la segunda, de los polígonos circunscritos alrededor de Q. La sucesión $\{\underline{Q}_n\}$ se obtiene si se unen el cuadrado $\underline{Q}$ y los triángulos semi-

*) Sean t un punto cualquiera del segmento $[0, 1]$ y n un número entero positivo cualquiera. Entonces, el punto t pertenece obviamente al segmento $\left[\frac{p}{2^{n}}, \frac{p+1}{2^{n}}\right]$ con tal de que todo segmento de este tipo y correspondiente al número $n+1$ se comprenda en el segmento correspondiente al número n.

**) Los conjuntos A y B se denominan *congruentes* si son acordados por el movimiento.

abiertos eliminados de los triángulos T_1, T_2, T_3, T_4 a todo paso impar del proceso descrito en el p. 1. La sucesión $\{\overline{Q}_n\}$ se obtiene eliminando del cuadrado $\overline{Q}$ los triángulos semiabiertos eliminados de los triángulos T_1, T_2, T_3, T_4 en todo paso par del proceso descrito en el p 1. Es obvio que cualquier polígono inscrito en la figura Q se comprenda en algún polígono $\underline{Q}_n$ y cualquier polígono circunscrito alrededor de la figura Q comprenda algún polígono $\overline{Q}_n$. Por eso, el límite de la sucesión $\{\underline{S}_n\}$ de las áreas de los polígonos $\underline{Q}_n$ es igual al *área inferior* $\underline{P}$ de la figura Q y el límite de la sucesión $\{\overline{S}_n\}$ de las áreas de los polígonos $\overline{Q}_n$ es igual al *área superior* $\overline{P}$ de la figura Q. Es fácil convencerse de que $\underline{S}_n = 4 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^{k-1}}$ y $\overline{S}_n = 8 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^{k-1}}$ *). Por eso, $\underline{P} = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 16/3$ y $\overline{P} = \lim_{n\to\infty} \overline{S} = 22/3$. Puesto que $\overline{P} \neq \underline{P}$, *la figura Q no es cuadrable.* Señalemos que la diferencia $\overline{P} - \underline{P} = 2$. De este modo, la frontera de la figura considerada Q tiene un área igual a 2.

3. Demostremos que *cualquier parte de la curva L limitada por dos puntos diferentes no es rectificable.* En primer lugar, demostremos que esta parte L' de la curva L tiene un área diferente de cero, es decir, cualquier polígono que cubre L' tiene un área superior a un número positivo. Observemos que L' comprende la parte L'' que corresponde a los puntos de segmento $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ y, por tanto, L'' se comprende dentro del triángulo $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ y puede obtenerse eliminando determinados triángulos semiabiertos de este triángulo (véase el p. 1 del presente complemento). Es fácil calcular que la suma S de las áreas de todos los triángulos semiabiertos eliminados es inferior a la suma S_T del triángulo $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$. Por consiguiente, la parte L'' tiene el área igual a $S_T - S > 0$. En el § 2 del presente capítulo, demostrando la cuadrabilidad de la figura limitada por una curva rectificable, hemos demostrado que el área de la curva rectificable es igual a cero (la curva rectificable puede ser cubierta por un polígono de área tan pequeña como se quiera). Por tanto, la parte L'' de la curva L, y, por consiguiente, la parte L', que contiene L'', no es rectificable.

OBSERVACION. Ninguna de las funciones construidas $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ *tiene derivada en ninguno de los puntos del segmento* $[0, 1]$.

*) Es fácil obtener estas fórmulas si tomamos en consideración que las sumas de las áreas de los triángulos eliminados en los pasos impares del proceso forman la progresión geométrica 1, 1/4, . . . y las sumas de las áreas de los triángulos eliminados en los pasos pares del proceso, la progresión geométrica 1/2, 1/8, . . .

Capítulo 3

MÉTODOS APROXIMADOS DE CÁLCULO DE RAÍCES DE LAS ECUACIONES Y LAS INTEGRALES DEFINIDAS

En el presente capítulo se consideran métodos aproximados de determinación de raíces de las ecuaciones y trascendentes y de cálculo de integrales definidas.

§ 1. Métodos aproximados de cálculo de raíces de las ecuaciones

En este párrafo estudiaremos el cálculo aproximado de una de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, donde $y = f(x)$ es función continua o diferenciable. Admitiremos que la raíz c de esta ecuación es aislada en un segmento $[a, b]$, o sea, que esta raíz es punto interior del segmento $[a, b]$ que no contiene otras raíces de la ecuación considerada. En la práctica, mediante una estimación aproximada suelen determinarse las dimensiones de dicho segmento $[a, b]$ *).

1. Método de la «horquilla». Comencemos por el método frecuentemente utilizado para el cálculo aproximado de las raíces en ordenadores moderoos de acción rápida.

Sea la raíz c de la función $f(x) = 0$ aislada en un segmento $[a, b]$. Respecto a la función $f(x)$, supongamos que es continua en el segmento $[a, b]$ y en los extremos de este segmento tiene valores de signos diferentes. A continuación, para que sea más breve, denominaremos *«horquilla»* todo segmento en cuyos extremos $f(x)$ tiene valores de signos diferentes.

Pasemos a describir el método de cálculo de la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, llamado *método de la "horquilla"*.

Para que sea más preciso, tomemos $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Dividamos el segmento $[a, b]$ en dos partes iguales. En este caso pueden tenerse dos casos: 1) el valor de la función en el centro del segmento $[a, b]$ es igual a cero (en este caso, la raíz buscada queda determinada). 2) dicho valor no es igual a cero. En este caso, una de las mitades del segmento $[a, b]$ es una horquilla. La denotaremos $[a_1, b_1]$. Evidentemente, $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Tratemos con el segmento $[a_1, b_1]$ de modo igual que con el $[a, b]$, o sea, dividamos el segmento $[a_1, b_1]$ en dos partes iguales. Siguiendo razonamientos análogos, tendremos dos posibilidades: 1) ora el proceso anteriormente descrito termina debido a que el valor de la función en el centro de uno de los

*) Además, se puede utilizar la información complementaria sobre la posición de la raíz que se desprende del contenido físico del problema.

segmentos será igual a cero (en este caso, la raíz buscada queda determinada), 2) ora se puede continuar ilimitadamente el proceso descrito y, como resultado, se obtiene el sistema concentrado de segmentos, horquillas $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, . . ., $[a_n, b_n]$, . . ., con tal de que para cualquier número n $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Dicho sistema concentrado de segmentos tiene un punto común c al que converge cada una de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ (véase el corolario del teorema 3.15, tomo 1). Demostremos que c es la raíz buscada, o sea, $f(c) = 0$. Puesto que la función $f(x)$ es continua en el punto c, cada una de las sucesiones $\{f(a_n)\}$ y $\{f(b_n)\}$ converge a $f(c)$. Pero, entonces, de las condiciones $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ y en virtud del teorema 3.13 del tomo 1 y de la observación de este teorema, obtenemos que a la vez son válidas las desigualdades $f(c) \leqslant 0$ y $f(c) \geqslant 0$, o sea, $f(c) = 0$.

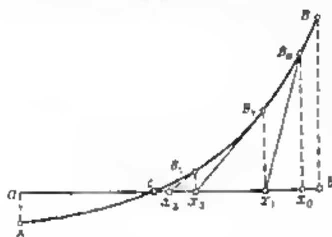


Fig. 3.1

Los razonamientos que hemos hecho dan el algoritmo que permite hallar la raíz buscada c. Por el valor aproximado de esta raíz se puede tomar el punto $\frac{a_n + b_n}{2}$, es decir, el punto medio del segmento $[a_n, b_n]$. Ya que la longitud del segmento $[a_n, b_n]$ es igual a $\frac{b-a}{2^n}$, el número $\frac{a_n + b_n}{2}$ se diferencia del valor exacto de la raíz en no más de $\frac{b-a}{2^{n+1}}$. De este modo, mediante la división sucesiva por la mitad de los segmentos horquillas el proceso descrito permite calcular la raíz buscada c con cualquier grado de exactitud fijado de antemano. Dado que el proceso descrito conduce a la repetición múltiple de las operaciones de cálculo *de un mismo tipo*, es especialmente cómodo para realizar los cálculos con máquinas matemáticas de acción rápida.

2. **Método de las tangentes** *). El método de las tangentes es uno de los métodos aproximados más eficaces de cálculo de raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

Sea la raíz buscada c de la ecuación $f(x) = 0$ aislada en el segmento $[a, b]$. Pasemos a describir el método de las tangentes sin aclarar, por ahora, en qué condiciones es posible aplicar este método.

Consideremos la gráfica de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ (fig. 3.1). Como aproximación nula de la raíz buscada tomemos cierto valor x_0 del segmento $[a, b]$ y mediante B_0 denotemos el punto de

*) Este método se denomina también *método de Newton*.

la gráfica de la función con la abscisa x_0. Tracemos por el punto B_0 la tangente a la gráfica de la función y como primera aproximación de la raíz buscada tomemos la abscisa x_1 del punto de intersección de esta tangente con el eje Ox *). Después tracemos la tangente a la gráfica de la función por el punto B_1 de abscisa x_1 y como segunda aproximación tomemos la abscisa x_2 del punto de intersección de esta tangente con el eje Ox. Siguiendo ilimitadamente este proceso, construimos la sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ de valores aproximados de la raíz buscada.

Para fines prácticos es conveniente obtener una fórmula recurrente que exprese x_{n+1} mediante x_n. Para hacerlo, tomemos la ecuación $Y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ de la tangente a la gráfica de la función en el punto B_n y calculemos la abscisa x_{n+1} del punto de intersección de esta tangente con el eje Ox. Con esto obtenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3.1)$$

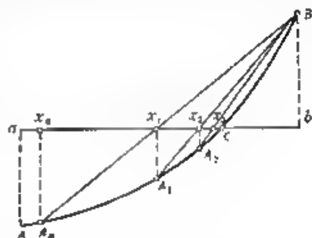


Fig. 3.2

La fórmula (3.1) define el algoritmo del método de tangentes. De este modo, el método de las tangentes es el método de aproximaciones sucesivas (y también le llaman método de las iteraciones) que se construyen con ayuda de la fórmula recurrente (3.1). Nuestra tarea posterior es la argumentación del método de las tangentes.

En el p. 5 vamos a aclarar las condiciones en las que la sucesión de valores x_n determinados por la fórmula (3.1) converge a la raíz buscada c y vamos a dar una estimación del error, es decir, de la desviación del valor aproximado x_n respecto del valor exacto de la raíz c.

3. Método de las cuerdas. Entre los métodos ampliamente extendidos para la solución de la ecuación $f(x) = 0$ tenemos el método de las cuerdas.

Pasemos a describirlo sin aclarar, por ahora, en qué condiciones es aplicable.

Supongamos que la raíz buscada c de la ecuación $f(x) = 0$ está aislada en el segmento $[a, b]$ y pasemos a considerar la gráfica de la función $f(x)$ en este segmento (fig. 3.2). Por la aproximación nula

*) Dado que la tangente en el punto B_0 es la gráfica de la diferencial de la función $y = f(x)$ en el punto x_0, dicho procedimiento de determinación de la primera aproximación x_1 se basa *en la sustitución de la función por su diferencial* en el punto x_0.

de la raíz buscada tomemos el número x_0 del segmento $[a, b]$ y mediante A_0 y B denotemos los puntos de la gráfica de la función con abscisas x_0 y b. Por los puntos A_0 y B de la gráfica de la función trazaremos la cuerda A_0B y tomemos como primera aproximación de la raíz buscada la abscisa x_1 del punto de intersección de esta cuerda con el eje Ox (véase la fig. 3.2). Luego, tracemos la cuerda por los puntos de la gráfica A_1 de abscisa x_1 y B. Como segunda aproximación tomemos la abscisa x_2 del punto de intersección de la cuerda A_1B con el eje Ox. Siguiendo ilimitadamente este proceso, construimos la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de valores aproximados de la raíz buscada.

Para fines prácticos, es conveniente obtener la fórmula recurrente que exprese x_{n+1} mediante x_n. Para hacerlo, tomemos la ecuación $\frac{Y-f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}=\frac{x-x_n}{b-x_n}$ de la cuerda que pasa por los puntos $A_n(x_n, f(x_n))$ y $B(b, f(b))$ y calculemos la abscisa x_{n+1} del punto de intersección de esta cuerda con el eje Ox. Con esto, obtenemos

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(b-x_n)\,f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}. \qquad (3.2)$$

La fórmula (3.2) define el algoritmo del método de las cuerdas. De este modo, el método de las cuerdas es un método de iteraciones que se construyen con ayuda de la fórmula recurrente (3.2). Nuestra tarea posterior es la argumentación del método de las cuerdas.

En el punto 6 aclararemos las condiciones en que la sucesión de valores sucesivos x_n converge a la raíz buscada c y daremos la estimación del error del método de las cuerdas.

4. Métodos de las iteraciones (aproximaciones sucesivas). De los puntos 2 y 3 se ve que los métodos de las tangentes y de las cuerdas están ligados por la idea general de construir aproximaciones sucesivas para la raíz buscada. Esta idea se basa en el método expuesto en el presente punto.

Examinemos este método aplicándolo a la ecuación

$$x = F(x). \qquad (3.3)$$

Introduzcamos el concepto de *sucesión iterativa*.

La sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ se denominará *iterativa*, si para cualquier $n \geqslant 1$ el elemento x_n se expresa mediante el elemento x_{n-1} por la fórmula recurrente $x_n = F(x_{n-1})$ y como x_0 se toma cualquier número del campo de definición de la función $F(x)$. Demostraremos que en determinadas condiciones la sucesión iterativa converge a la raíz de la ecuación (3.3) y, por tanto, se pueden tomar sus elementos por valores aproximados de esta raíz.

Es válida la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Sea la función $F(x)$ continua en el segmento $[a, b]$ y que todos los elementos de la sucesión iterativa $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$

se encuentren en este segmento. Entonces, si esta sucesión converge a un número c, dicho número será la raíz de la ecuación (3.3).

DEMOSTRACIÓN Dado que la sucesión $\{x_n\}$ converge a c y todos los elementos de ella pertenecen al segmento $[a, b]$, el límite c también pertenece al segmento $[a, b]$ (véase el corolario 2, teorema 3.13, tomo 1). Según la condición, la función $F(x)$ es continua en el punto c y por eso la sucesión $\{F(x_{n-1})\}$ converge a $F(c)$. De este modo, la igualdad $x_n = F(x_{n-1})$, en el límite, para $n \to \infty$, se transforma en la igualdad $c = F(c)$, o sea, c es la raíz de la ecuación (3.3). La afirmación demostrada se empleará esencialmente para argumentar los métodos de las tangentes y de las cuerdas en los puntos 5 y 6.

Demostremos otra afirmación frecuentemente usada para calcular aproximadamente la raíz de la ecuación (3.3) con ayuda de la sucesión iterativa.

Afirmación 2. Sea c la raíz de la ecuación (3.3) *y que en un segmento simétrico respecto al punto c* $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ *la derivada de la función* $F(x)$ *satisfaga la condición* $|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$. *Entonces la sucesión iterativa que tiene como* x_0 *cualquier número del segmento* $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, *converge a dicha raíz c.*

DEMOSTRACIÓN Antes que nada demostremos que todos los elementos de la sucesión iterativa $\{x_n\}$ pertenecen a dicho segmento $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. En efecto, x_0 pertenece a este segmento por la condición. Por lo tanto, es suficiente, suponiendo que x_{n-1} pertenece a este segmento, demostrar que x_n también pertenece a dicho segmento. Para hacerlo, apliquemos la fórmula de Lagrange a la diferencia $F(x_{n-1}) - F(c)$ y tomemos en consideración que $F(c) = c$, $x_n = F(x_{n-1})$. Obtenemos

$$x_n - c = F(x_{n-1}) - F(c) = F'(\xi)(x_{n-1} - c), \tag{3.4}$$

donde ξ es el punto que se encuentra entre x_{n-1} y c y, por tanto, perteneciente al segmento $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Dado que $|F'(\xi)| \leqslant \alpha < 1$, de la igualdad (3.4) obtenemos

$$|x_n - c| \leqslant \alpha |x_{n-1} - c|. \tag{3.5}$$

A su vez de (3.5), debido a que $0 < \alpha < 1$, obtenemos

$$|x_n - c| < |x_{n-1} - c|. \tag{3.6}$$

La desigualdad (3.6) establece que todo elemento posterior x_n está más próximo a c que el elemento anterior x_{n-1}, y, por tanto, ya que x_{n-1} pertenece al segmento $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ y este segmento es simétrico respecto al punto c, entonces x_n también pertenece a dicho segmento. Queda por demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ converge a c. Puesto que la desigualdad (3.5) es válida para todos los números n, entonces, empleándola, obtenemos

$$|x_n - c| \leqslant \alpha^n |x_0 - c|. \tag{3.7}$$

De la última desigualdad es obvio que $x_n \to c$ puesto que $\alpha^n \to 0$. La afirmación 2 queda demostrada.

Hagamos unas observaciones prácticas respecto a la afirmación que acabamos de demostrar. Supongamos que por medio de una estimación preliminar hemos establecido que la raíz buscada de la ecuación (3.3) es aislada en cierto segmento $[a, b]$ en el cual la derivada de la función $F(x)$ satisface la condición $|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$.

Puesto que el segmento $[a, b]$, hablando en general, *no es simétrico* respecto a la raíz buscada, entonces, lógicamente, surge la pregunta: ¿de qué modo podemos elegir la aproximación nula x_0 con tal de que se pueda aplicar la afirmación 2, anteriormente demostrada? Observemos que dondequiera que se encuentre dentro el segmento $[a, b]$ la raíz buscada c, al menos uno de los dos segmentos simétricos respecto a c, $[a, 2c-a]$ ó $[2c-b, b]$ (fig. 3.3), *pertenece por completo al segmento* $[a, b]$. Por tanto, al menos uno de los puntos a y b pertenece al segmento simétrico respecto a la raíz c, en todos los puntos del cual $|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$. Por lo tanto, según la afirmación 2 anteriormente demostrada, al menos uno de los puntos a y b se puede elegir en calidad de x_0. Hay que tomar como x_0 aquel de los dos puntos a y b para el cual la aproximación $x_1 = F(x_0)$ no abandona los límites del segmento $[a, b]$.

Fig. 3.3

En la práctica con más frecuencia se encuentra el caso cuando la derivada $F'(x)$ tiene un signo determinado en el segmento $[a, b]$.

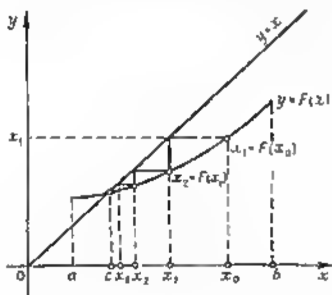


Fig. 3.4

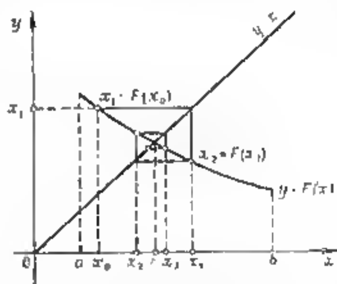


Fig. 3.5

Si este signo es positivo, de la fórmula (3.4) se desprende que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona. Este caso conduce al llamado *diagrama escalonado* representado en la fig. 3.4. Si la derivada $F'(x)$ es negativa en el segmento $[a, b]$, de la misma fórmula (3.4) se ve que cualesquiera dos elementos sucesivos x_{n-1} y x_n se hallan a lados diferentes de la raíz c. Este caso lleva al llamado *diagrama en forma de espiral*, representado en la fig. 3.5.

OBSERVACION. Surge la pregunta sobre la estimación del error del método de las iteraciones, o sea, sobre la estimación de la desviación de la n-ésima aproximación de x_n respecto del valor exacto de la raíz c. De la fórmula (3.7) se desprende directamente la siguiente estimación:

$$|x_n - c| \leqslant \alpha^n (b - a),$$

donde α es la cota superior exacta de la función $|F'(x)|$ en el segmento $[a, b]$ en el cual es aislada la raíz considerada. Si la derivada $F(x)$ es negativa en el segmento $[a, b]$, entonces, como se indica anteriormente, x_{n-1} y x_n se hallan a lados diferentes de la raíz c, y, por tanto, es válida la siguiente estimación:

$$|x_n - c| \leqslant |x_n - x_{n-1}|.$$

Si en el caso considerado por el valor aproximado de la raíz tomamos la semisuma de dos aproximaciones sucesivas

$$x_n^* = \frac{x_n + x_{n-1}}{2},$$

obtenemos la siguiente estimación del error:

$$|x_n^* - c| \leqslant \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2}.$$

5. Argumentación del método de las tangentes.

1°. En primer lugar, consideremos el caso cuando la raíz buscada c de la ecuación $f(x) = 0$ es aislada en el segmento $[a, b]$ sobre el cual la función $f(x)$ tiene *la primera derivada que no se anula y la segunda derivada acotada*. Demostremos que en este caso existe un entorno bastante pequeño de la raíz c tal que si la aproximación nula x_0 se halla dentro de este entorno, la sucesión $\{x_n\}$, determinada por la fórmula recurrente (3.1), converge a la raíz c.

Ante todo, observemos que la ecuación

$$x = F(x), \quad \text{donde } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{3.8}$$

tiene en el segmento $[a, b]$ una sola raíz c coincidente con la raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Por eso, en vez de la ecuación $f(x) = 0$, resolveremos la ecuación (3.8). Para esto, tomando un valor de x_0, construyamos la sucesión iterativa

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3.9}$$

Observemos que la fórmula recurrente (3.9) coincide completamente con la fórmula recurrente (3.1).

Para demostrar la convergencia de la sucesión iterativa $\{x_n\}$ a la raíz buscada c basta demostrar que en cierto ε-entorno de la

raíz c la derivada $F'(x)$ satisface la condición $|F'(x)| \leqslant \alpha < 1$ y tomar x_0 en dicho ε-entorno (véase la afirmación 2 del p. 4). En virtud de las exigencias planteadas ante la función $f(x)$ existen números positivos m y N tales que en todos los puntos del segmento $[a, b]$ se cumplen las desigualdades

$$|f'(x)| \geqslant m > 0\,^{*)}, \quad |f''(x)| \leqslant N. \tag{3.10}$$

Dado que

$$F'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

de las desigualdades (3.10) se desprende la siguiente estimación:

$$|F'(x)| \leqslant \frac{|f(x)|\,N}{m^2}. \tag{3.11}$$

De la continuidad de la función $f(x)$ se desprende que en un ε-entorno de la raíz c esta función satisface la desigualdad

$$|f(x)| \leqslant \frac{m^2}{N}\alpha, \tag{3.12}$$

donde α es el número fijado del intervalo $0 < \alpha < 1$. Comparando las desigualdades (3.11) y (3.12), obtenemos que en todos los puntos de dicho ε-entorno de la raíz

$$|F'(x)| \leqslant \alpha < 1.$$

Por lo tanto, la convergencia de la sucesión (3.9) a la raíz c queda demostrada.

OBSERVACIÓN 1. Hemos demostrado la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ a la raíz c solamente para la condición de que la aproximación nula x_0 se encuentre en un ε-entorno bastante pequeño de la raíz c. La elección del valor de x_0 necesario se realiza fácilmente con ordenador moderno de acción rápida haciendo varias pruebas.

OBSERVACIÓN 2. Estimemos la desviación del valor aproximado de la raíz x_{n+1} respecto del valor exacto de c. Para este fin, desarrollemos la función $f(x)$ en el entorno de x_n por la fórmula de Taylor con el término residual en forma de Lagrange:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_n)^2.$$

Poniendo en esta fórmula $x = c$ y teniendo en cuenta que $f(c) = 0$, tendremos

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(c - x_n)^2.$$

Sustrayendo de la última fórmula la fórmula $f(x_n) + f'(x_n) \times \times (x_{n+1} - x_n) = 0$, que se desprende de la relación recurrente (3.9),

*) Estas desigualdades se deben a que la derivada $f'(x)$ es continua y no se anula en el segmento considerado.

obtenemos

$$x_{n+1}-c=\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(x_n-c)^2.$$

De aquí, empleando las denotaciones (3.10) anteriormente adoptadas, llegamos a la siguiente desigualdad:

$$|x_{n+1}-c|\leqslant\frac{K}{2m}|x_n-c|^2.$$

Aplicando sucesivamente esta estimación para $n=0, 1, 2, \ldots$, obtenemos la siguiente estimación:

$$|x_{n+1}-c|\leqslant\left(\frac{K}{2m}\right)^n|x_0-c|^{2^n}.$$

2°. Argumentemos el método de las tangentes con unas suposiciones un poco diferentes.

Sea que la raíz buscada c de la ecuación $f(x)=0$ es aislada en el segmento $[a, b]$, sobre el cual $f(x)$ tiene *la primera derivada monótona que conserva un signo determinante*. Esta derivada es obligatoriamente continua puesto que no puede tener puntos de discontinuidad de primera especie y la función monótona no tiene otros puntos de discontinuidad.

Para precisar supongamos que la derivada *no decrece y es positiva* en el segmento $[a, b]$. Demostremos que la sucesión iterativa $\{x_n\}$ (que tiene $x_0=b$ y x_{n+1} se determina mediante x_n empleando la fórmula recurrente (3.9)), converge a la raíz c.

Si para un número n resulta $x_n=c$, siendo c la raíz buscada, entonces $f(x_n)=f(c)=0$ y de la fórmula (3.9) obtenemos que $x_{n+1}=c$. Siguiendo estos razonamientos demostramos que también $x_{n+2}=x_{n+3}=\ldots=c$, o sea, en este caso la sucesión iterativa $\{x_n\}$ converge a la raíz buscada c.

Ahora demostremos por inducción que, *si x_n satisface las relaciones $c<x_n\leqslant b$, x_{n+1} satisface las relaciones $c\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n\leqslant b$.*

De aquí se desprenderá que todos los x_n pertenecen al segmento $[c, b]$ (puesto que $x_0=b$ pertenece a este segmento), así como el hecho de que la sucesión $\{x_n\}$ es no creciente y, por tanto, convergente. En virtud de la afirmación 1 del p. 4, la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ y el hecho de que todos los elementos de ella pertenecen al segmento $[c, b]$ (y, por lo tanto, al segmento $[a, b]$) culmina la demostración de la convergencia de esta sucesión a la raíz buscada c.

Pues, queda por demostrar que si x_n satisface las relaciones $c<x_n\leqslant b$, entonces x_{n+1} satisface las relaciones $c\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n$.

Sea $c<x_n\leqslant b$. Entonces, de la fórmula (3.9), teniendo en cuenta que $f(c)=0$, obtenemos

$$x_n-x_{n+1}=\frac{f(x_n)-f(c)}{f'(x_n)}$$

Aplicando a la expresión en el numerador de la última fracción la fórmula de Lagrange, obtenemos

$$x_n - x_{n+1} = (x_n - c)\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)},$$

donde $c < \xi_n < x_n$. En virtud de que la derivada de la función $f(x)$ no decrece y es positiva, la fracción $\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}$ es también positiva y no supera a la unidad, o sea, $0 \leqslant x_n - x_{n+1} \leqslant x_n - c$ ó $c \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$.

OBSERVACIÓN 3. Hemos considerado el caso cuando $f'(x)$ no decrece y es positiva en $[a, b]$. Son posibles tres casos más: 1) $f'(x)$ no decrece y es negativa en $[a, b]$, 2) $f'(x)$ no crece y es positiva en $[a, b]$, 3) $f'(x)$ no decrece y es negativa en $[a, b]$.

En cada uno de estos casos, la argumentación del método de las tangentes se realiza de modo completamente análogo al caso anteriormente considerado. Solamente señalemos que, en el caso 1), por aproximación nula hay que tomar el valor $x_0 = b$, y en los casos 2) y 3), el valor $x_0 = a$. Esto asegura la pertenencia de todos los términos de la sucesión iterativa $\{x_n\}$ al segmento $[a, b]$ y la convergencia de esta sucesión a la raíz c buscada.

OBSERVACIÓN 4. Estimemos la desviación de la n-ésima aproximación de x_n respecto del valor exacto de la raíz c (observando las suposiciones enunciadas en este punto).

Aplicando la fórmula de Lagrange a la expresión $f(x_n) = f(x_n) - f(c)$, tendremos $f(x_n) = (x_n - c) f'(\xi_n)$. De aquí obtenemos la siguiente estimación:

$$|x_n - c| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{3.13}$$

donde m es valor mínimo de $|f'(x)|$ en el segmento $[a, b]$. La fórmula (3.13) permite estimar la desviación de x_n respecto del valor exacto de la raíz c por medio del valor del módulo de la función dada $y = f(x)$ en el punto x_n.

6. Argumentación del método de las cuerdas. Supongamos que la raíz buscada c de la ecuación $f(x) = 0$ es aislada en un segmento $[a, b]$, sobre el cual la función $f(x)$ tiene la *primera derivada monótona que conserva su signo constante*. Para la precisión tomemos que esta derivada no decrece y es positiva en el segmento $[a, b]$. Observemos que la ecuación

$$x = F(x), \quad \text{donde} \quad F(x) = x - \frac{(b-x)f(x)}{f(b)-f(x)}\ ^{*)}, \tag{3.14}$$

tiene en el segmento $[a, b]$ una sola raíz c coincidente con la raíz de

---

*) Además, consideramos que $F(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$. Entonces la función $F(x)$ será continua sobre todo el segmento $[a, b]$.

la ecuación $f(x) = 0$. Por eso, en vez de la ecuación $f(x) = 0$ resolveremos la ecuación (3.14). Para esto, tomando $x_0 = a$, construyamos la sucesión iterativa

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{(b-x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \tag{3.15}$$

Observemos que la fórmula recurrente (3.15) coincide exactamente con la fórmula recurrente (3.2).

Demostremos que la sucesión $\{x_n\}$ converge a la raíz buscada c.

Si para un número n se obtiene $x_n = c$, siendo c la raíz buscada, entonces $f(x_n) = f(c) = 0$ y de la fórmula (3.15) obtenemos también $x_{n+1} = c$. Siguiendo unos razonamientos análogos, demostremos sucesivamente que, también, $x_{n+2} = x_{n+3} = \ldots = c$, o sea, la sucesión iterativa $\{x_n\}$ converge a la raíz buscada c.

Demostremos ahora, por inducción, que *si x_n satisface las relaciones $a \leqslant x_n < c$, entonces x_{n+1} satisface las relaciones $a \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant c$.*

De aquí y de $x_0 = a$ se desprenderá que todos los valores de x_n pertenecen al segmento $[a, c]$ (y, tanto más, el segmento $[a, b]$) y que la sucesión $\{x_n\}$ es no decreciente (y, por tanto, es convergente).

En virtud de la afirmación 1 del p. 4, esto culmina la demostración de la sucesión iterativa $\{x_n\}$ a la raíz buscada c.

Así pues, queda por demostrar que si x_n satisface las relaciones $a \leqslant x_n < c$, entonces x_{n+1} satisface las relaciones $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant c$.

Sea $a \leqslant x_n < c$. De la relación (3.15), teniendo en cuenta que $f(c) = 0$, obtenemos

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{(b-x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = \frac{(b-x_n)[f(c) - f(x_n)]}{[f(b) - f(c)] + [f(c) - f(x_n)]}.$$

Aplicando la fórmula de Lagrange a la expresión entre corchetes, obtenemos

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(b-x_n) f'(\xi_n)}{(b-c) f'(\xi_n^*) + (c-x_n) f'(\xi_n)} \cdot (c - x_n), \tag{3.16}$$

donde $x_n < \xi_n < c$, $c < \xi_n^* < b$, así que $\xi_n < \xi_n^*$. En virtud del no decrecimiento y la positividad de la derivada $f'(x)$, se puede escribir $0 < f'(\xi_n) \leqslant f'(\xi_n^*)$. De aquí se desprende que la fracción en el miembro derecho de (3.16) es positiva y, además, no supera la unidad (puesto que $(b-c) f'(\xi_n^*) + (c - x_n) f'(\xi_n) \geqslant [(b-c) + (c - x_n)] f'(\xi_n) = (b - x_n) f'(\xi_n)$). Por tanto, $0 \leqslant x_{n+1} - x_n \leqslant c - x_n$, es decir, $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant c$.

OBSERVACIÓN 1. Hemos considerado el caso cuando $f'(x)$ no decrece y es positiva en $[a, b]$. Son posibles tres casos más: 1) $f'(x)$ no crece y es negativa en $[a, b]$, 2) $f'(x)$ no crece y es positiva en $[a, b]$, 3) $f'(x)$ no decrece y es negativa en $[a, b]$.

Los últimos tres casos son análogos al anteriormente considerado. En el caso 1) la ecuación $f(x) = 0$ se sustituye, igual que anterior-

mente, por la ecuación (3.14) y por aproximación nula se toma $x_0 = a$ (además, la sucesión $\{x_n\}$ resulta también no decreciente). En los casos 2) y 3) la ecuación $f(x) = 0$ se sustituye no por la ecuación (3.14), sino por la ecuación

$$x = F(x),$$

donde

$$F(x) = x - \frac{(a-x) f(x)}{f(a) - f(x)}$$

y por aproximación nula se toma el punto $x_0 = b$ (además, la sucesión $\{x_n\}$ resulta no creciente).

OBSERVACION 2 Indíquemos que para el método de las cuerdas es válida la misma estimación (3.13) de la desviación de x_n respecto de la raíz c que para el método de las tangentes.

OBSERVACION 3 En la práctica con frecuencia se usa el método combinado que consiste en la aplicación alternativa del método de las cuerdas y del de las tangentes. Para mayor precisión, supongamos que $f'(x)$ no decrece y es positiva en el segmento $[a, b]$ (fig 3.6). Determinemos x_1 por el método de las tangentes tomando por aproximación nula el punto b. Después, determinemos x_2 aplicando el método de las cuerdas, pero no al segmento $[a, b]$, sino al segmento $[a, x_1]$. Luego, determinemos x_3 por el método de las tangentes, partiendo del ya hallado x_1, y x_4, por el método de las cuerdas aplicándolo al segmento $[x_2, x_3]$. Dicho proceso se ilustra en la fig. 3.6.

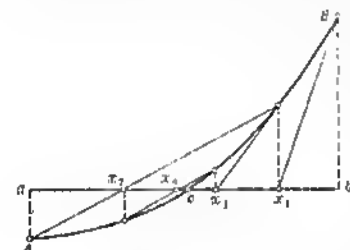


Fig. 3.6

Las ventajas del método combinado consisten en lo siguiente: primero, ofrece una convergencia más rápida que el método de las cuerdas, y, segundo, puesto que las aproximaciones sucesivas x_{n+1} y x_n del método combinado aproximan la raíz por lados diferentes, entonces la diferencia $|x_{n+1} - x_n|$ da la estimación del error de este método. Si como valor aproximado de la raíz tomamos $x_n^* = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$, la estimación del error es

$$|x_n^* - c| < \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2}.$$

§ 2. Métodos aproximados de cálculo de las integrales definidas

1. Observaciones preliminares. Resolviendo una serie de problemas actuales físicos y técnicos nos encontramos con integrales definidas de las funciones, cuyas primitivas *no se expresan mediante funciones elementales.* Además, en las aplicaciones tenemos que operar con integrales definidas *cuyas funciones subintegrales* propias *no son*



Fig. 3.7

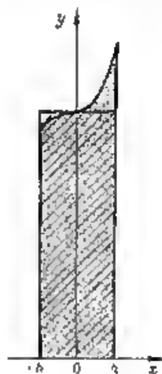


Fig. 3.8

elementales. Esto conduce a la necesidad de elaborar métodos aproximados para calcular las integrales definidas *).

En este párrafo conoceremos los tres métodos aproximados más usados para calcular integrales definidas: *el método de los rectángulos, el de los trapecios y el de las parábolas.*

La idea principal de estos métodos consiste en sustituir la función subintegral $f(x)$ por otra más simple, un polinomio que coincide con $f(x)$ en algunos puntos. Para entender esta idea, consideremos, para valores pequeños de h la integral $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ que es el área del trapecio curvilíneo que se encuentra por debajo de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el segmento $[-h, h]$ (fig. 3.7).

---

*) Observemos que los métodos aproximados se usan también con frecuencia para las integrales que se expresan mediante funciones elementales.

Sustituyamos la función $f(x)$ por el polinomio de grado nulo, a saber, por la constante $f(0)$. Al mismo tiempo, la integral $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ se sustituye aproximadamente por *el área del rectángulo* rayado en la fig. 3.8. En adelante mostraremos que, con determinadas exigencias para $f(x)$, el error cometido como resultado de esta sustitución es del orden de h^3. Luego, sustituimos la función $f(x)$ por un polinomio de

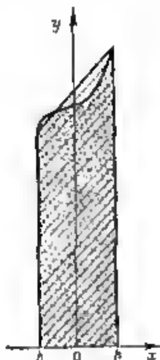


Fig. 3.9

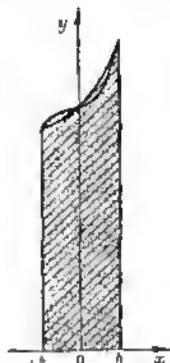


Fig. 3.10

primer grado, a saber, por la función lineal $y = kx + b$ coincidente con $f(x)$ en los puntos $-h$ y h. Además, la integral $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ se sustituye aproximadamente por *el área del trapecio curvilíneo* rayado en la fig. 3.9. En adelante mostraremos que, con determinadas exigencias para $f(x)$, el error cometido como resultado de esta sustitución es también del orden de h^3. En fin, sustituyamos la función $f(x)$ por un polinomio de segundo grado, o sea, por la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ coincidente con $f(x)$ en los puntos $-h$, 0 y h. Al mismo tiempo, la integral $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ se sustituye aproximadamente por *el área de la figura que se encuentra por debajo de la parábola* y es rayada en la fig. 3.10.

Más adelante mostraremos que, con determinadas exigencias para la función $f(x)$, el error cometido en esta sustitución es del orden

de h^5. Si debemos calcular la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ por cualquier segmento $[a, b]$, es lógico dividir este segmento en un número bastante grande de segmentos pequeños y para cada uno de estos segmentos hacer los razonamientos anteriormente expuestos. De este modo, llegamos a los métodos de los rectángulos, los trapecios y las parábolas en forma general.

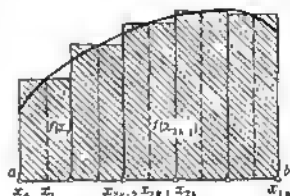


Fig. 3.11

Una exposición más detallada de cada uno de estos métodos se da más adelante. Hagamos aquí una observación importante para el material posterior.

OBSERVACIÓN. *Sea la función $f(x)$ continua en el segmento $[a, b]$ y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ algunos puntos del segmento $[a, b]$. Entonces, en este segmento existe un punto ξ tal que el promedio de* $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$ *es igual a $f(\xi)$.*

En efecto, denotemos mediante m y M las cotas exactas de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. Entonces, para cualquier número k son válidas las desigualdades $m \leqslant f(x_k) \leqslant M$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Sumando estas desigualdades por todos los números $k = 1, 2, \ldots, n$ y dividiendo el resultado por n, obtenemos

$$m \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \leqslant M.$$

Puesto que la función continua toma cualquier valor intermedio comprendido entre m y M, entonces, en el segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que

$$f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}. \qquad (3.17)$$

2. Método de los rectángulos. Supongamos que se exige calcular la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (3.18)$$

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes *iguales* empleando los puntos $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$. Mediante x_{2k-1} denotemos el punto medio del segmento $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ (fig. 3.11). El método de los

rectángulos consiste en sustituir la integral (3.18) por la suma

$$\frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1})]$$

de las áreas de los rectángulos con alturas iguales a $f(x_{2k-1})$ y bases iguales a $x_{2k}-x_{2k-2}=\frac{b-a}{n}$ (estos rectángulos están rayados en la fig. 3.11). De este modo, es válida la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1})]+R, \qquad (3.19)$$

donde R es término residual. La fórmula (3.19) se denomina *fórmula de los rectángulos.*

Demostremos que, si en el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ tiene la segunda derivada continua, en este segmento existe un punto η tal que el término residual R en la fórmula (3.19) es igual a

$$R=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f^{(2)}(\eta). \qquad (3.20)$$

Con este fin, estimemos primeramente $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$, teniendo en cuenta que *en el segmento* $[-h, +h]$ *la función* $f(x)$ *tiene la segunda derivada continua.*

Para hacerlo, integremos dos veces por partes cada una de las dos integrales siguientes:

$$I_1=\int_{-h}^{0} f^{(2)}(x)(x+h)^2\,dx, \quad I_2=\int_{0}^{h} f^{(2)}(x)(x-h)^2\,dx.$$

Para la primera de éstas, obtenemos

$$I_1=\int_{-h}^{0} f^{(2)}(x)(x+h)^2\,dx=[(x+h)^2 f'(x)]\Big|_{-h}^{0}-$$

$$-2\int_{-h}^{0} f'(x)(x+h)\,dx=f'(0)h^2-[2(x+h)\cdot f(x)]\Big|_{-h}^{0}+$$

$$+2\int_{-h}^{0} f(x)\,dx=f'(0)h^2-2f(0)h+2\int_{-h}^{0} f(x)\,dx.$$

Para la segunda integral obtenemos de un modo completamente análogo

$$I_2=-f'(0)h^2-2\cdot f(0)h+2\int_{0}^{h} f(x)\,dx.$$

La semisuma de las expresiones obtenidas para I_1 e I_2 conduce a la siguiente fórmula:

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = 2f(0)\,h + \frac{I_1+I_2}{2}. \qquad (3.21)$$

Estimemos la magnitud $\frac{I_1+I_2}{2}$, aplicando la fórmula del valor medio a las integrales I_1 e I_2 y tomando en consideración la no negatividad de las funciones $(x+h)^2$ y $(x-h)^2$. Obtenemos la existencia del punto ξ_1 en el segmento $[-h, 0]$ y del punto ξ_2 en el segmento $[0, h]$ tales que

$$\frac{I_1+I_2}{2} = \frac{1}{2}\int_{-h}^{0} f^{(2)}(x)(x+h)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{h} f^{(2)}(x)(x-h)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} f^{(2)}(\xi_1)\int_{-h}^{0}(x+h)^2\,dx + \frac{1}{2} f^{(2)}(\xi_2)\int_{0}^{h}(x-h)^2\,dx =$$

$$= \frac{h^3}{6} f^{(2)}(\xi_1) + \frac{h^3}{6} f^{(2)}(\xi_2) = \frac{h^3}{3}\,\frac{f^{(2)}(\xi_1)+f^{(2)}(\xi_2)}{2}.$$

En virtud de la observación al final del p. 1, en el segmento $[-h, +h]$ existe un punto η tal que

$$\frac{f^{(2)}(\xi_1)+f^{(2)}(\xi_2)}{2} = f^{(2)}(\eta).$$

Por eso, para la semisuma $\frac{I_1+I_2}{2}$ obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{I_1+I_2}{2} = \frac{h^3}{3} f^{(2)}(\eta).$$

Poniendo esta expresión en (3.21), obtenemos que

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = 2f(0)\,h + \overline{R}, \qquad (3.22)$$

donde

$$\overline{R} = \frac{1}{24} f^{(2)}(\eta)(2h)^3 \quad (-h \leqslant \eta \leqslant h). \qquad (3.23)$$

Puesto que la magnitud $2f(0)\cdot h$ es el área del rectángulo rayado en la fig. 3.8, las fórmulas (3.22) y (3.23) demuestran que el error, cometido cuando sustituimos $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ por dicha área, es del orden de h^3.

De este modo, la fórmula $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx 2f(0)\,h$ *es tanto más exacta cuanto menos sea* h. Por eso, para calcular la integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ es lógico representar ésta en forma de la suma de un número bastante grande n de integrales

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx$$

y aplicar la fórmula (3.22) a cada una de dichas integrales. Además, tomando en consideración que la longitud del segmento $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ es igual a $\frac{b-a}{n}$, obtenemos la fórmula de los rectángulos (3.19), en la cual

$$R = \overline{R}_1 + \overline{R}_2 + \ldots + \overline{R}_n = \frac{(b-a)^3}{24n^3}[f^{(2)}(\eta_1) + f^{(2)}(\eta_2) + \ldots + f^{(2)}(\eta_n)] = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\,\frac{f^{(2)}(\eta_1) + f^{(2)}(\eta_2) + \ldots + f^{(2)}(\eta_n)}{n} = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\,f^{(2)}(\eta)$$

(Aquí $a \leqslant \eta \leqslant b$. Hemos empleado la fórmula (3.17) para la función $f''(x)$).

3. Método de los trapecios. Sea que, igual que antes, se exige calcular la integral

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (3.18)$$

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales, empleando los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ (fig. 3.12). El método de los trapecios consiste en sustituir la integral (3.18) por la suma

$$\frac{b-a}{2n}\{[f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \ldots + [f(x_{n-1}) + f(x_n)]\} = \frac{b-a}{2n}\left\{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right\}$$

de las áreas de los trapecios con bases iguales, respectivamente a $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$ y alturas iguales a $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ (estos trapecios están rayados en la fig. 3.12).

De este modo, es válida la fórmula

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left\{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right\} + R, \qquad (3.24)$$

donde R es término residual. La fórmula (3.24) se denomina *fórmula de los trapecios*.

Demostremos que si la función $f(x)$ tiene la segunda derivada continua en el segmento $[a, b]$, en este segmento existe un punto η tal que el término residual R en la fórmula (3.24) toma la forma

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f^{(2)}(\eta). \quad (3.25)$$

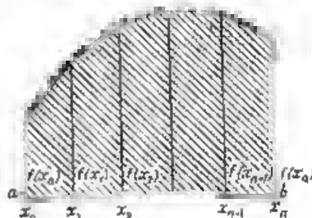


Fig. 3.12

En primer lugar, estimemos la integral $\int_{-h}^{+h} f(x)\,dx$, teniendo en cuenta que la *función $f(x)$ tiene la segunda derivada continua en el segmento $[-h, +h]$*.

Integrando dos veces la integral $\int_{-h}^{+h} f^{(2)}(x)(x^2-h^2)\,dx$ por partes, obtenemos

$$\int_{-h}^{+h} f^{(2)}(x)(x^2-h^2)\,dx = [f'(x)(x^2-h^2)]\Big|_{-h}^{+h} -$$

$$-2\int_{-h}^{+h} f'(x)\,x\,dx = -[2f(x)\,x]\Big|_{-h}^{+h} + 2\int_{-h}^{+h} f(x)\,dx =$$

$$= -2[f(-h)+f(+h)]\,h + 2\int_{-h}^{+h} f(x)\,dx. \quad (3.26)$$

En virtud de (3.26), llegamos a la fórmula

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \frac{f(-h)+f(h)}{2}\,2h + \overline{R}, \quad (3.27)$$

donde

$$\overline{R} = -\frac{1}{12} f^{(2)}(\eta)(2h)^3 \; (-h \leqslant \eta \leqslant h). \quad (3.28)$$

Dado que la magnitud $\frac{f(-h)+f(h)}{2}\,2h$ es el área del trapecio rayado en la fig. 3.9, las fórmulas (3.27) y (3.28) demuestran que el error cometido a consecuencia de la sustitución de $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ por dicha área, es del orden de h^3.

Para calcular la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, igual que en el método de los rectángulos, representamos esta integral en forma de la suma de un número bastante grande n de integrales

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx.$$

Aplicando las fórmulas (3.27) y (3.28) a cada una de estas integrales, llegamos a la fórmula de los trapecios (3.24) con la expresión para el término residual (3.25).

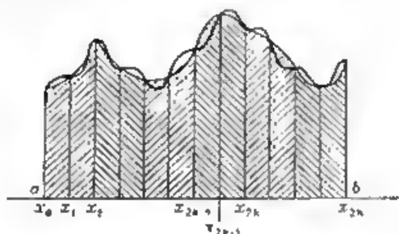


Fig. 3.13

4. Método de las parábolas. Para calcular la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{3.18}$$

volvamos a dividir el segmento $[a, b]$ en n partes iguales, empleando los puntos $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$ y mediante x_{2k-1} denotemos el punto medio del segmento $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. El método de las parábolas consiste en sustituir la integral (3.18) por la suma

$$\frac{b-a}{6n}\{[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+\ldots+[f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})]\} =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\right\}$$

de áreas de las figuras rayadas en la fig. 3.13 que son trapecios curvilíneos situados por debajo de las parábolas que pasan por tres

puntos de la gráfica de la función $f(x)$ que tienen las abscisas x_{2k-2}, x_{2k-1} y x_{2k} *).

De este modo, es válida la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\Big[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\Big] + R, \qquad (3.29)$$

donde R es el término residual. La fórmula (3.29) se denomina *fórmula de las parábolas* o *fórmula de Simpson*.

Demostremos que si la función $f(x)$ tiene la cuarta derivada continua en el segmento $[a, b]$, en este segmento existe un punto η tal que el término residual R en la fórmula (3.29) es igual a

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta). \qquad (3.30)$$

Con este fin, estimemos primero $\int_{-h}^{+h} f(x)\,dx$, teniendo en cuenta que *en el segmento* $[-h, +h]$ *la función* $f(x)$ *tiene la cuarta derivada continua*.

Integremos cuatro veces por partes cada una de las dos integrales siguientes:

$$I_1 = \int_{-h}^{0} f^{(4)}(x)\,(x+h)^3\left(x-\frac{h}{3}\right)dx,$$

$$I_2 = \int_{0}^{h} f^{(4)}(x)\,(x-h)^3\left(x+\frac{h}{3}\right)dx.$$

*) Del ejemplo 3 (p. 4, § 2, cap. 2, tomo 2) se desprende que la expresión $\frac{b-a}{6n}[f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})]$ (tomando en consideración que $\frac{b-a}{6n} = \frac{x_{2k}-x_{2k-2}}{6}$) es el área que se encuentra por debajo de la parábola que pasa por tres puntos de la gráfica de la función $f(x)$ con las abscisas x_{2k-2}, x_{2k-1} y x_{2k}.

Para la primera integral obtenemos

$$I_1=\int_{-h}^{0} f^{(4)}(x)\,(x+h)^3\left(x-\frac{h}{3}\right)dx=\left[f^{(3)}(x)\,(x+h)^3\left(x-\frac{h}{3}\right)\right]_{-h}^{0}-$$

$$-\left\{f^{(2)}(x)\left[3\,(x+h)^2\left(x-\frac{h}{3}\right)+(x+h)\right]\right\}\Big|_{-h}^{0}+$$

$$+\left\{6f'(x)\left[(x+h)\left(x-\frac{h}{3}\right)+(x+h)^2\right]\right\}\Big|_{-h}^{0}-$$

$$\left\{6f(x)\left(4x+\frac{8}{3}h\right)\right\}\Big|_{-h}^{0}+24\int_{-h}^{0} f(x)\,dx=$$

$$=-f^{(3)}(0)\frac{h^4}{3}+4f'(0)\,h^2-8h\,[f(-h)+2f(0)]+$$

$$+24\int_{-h}^{0} f(x)\,dx. \qquad (3.31)$$

Para I_2, obtenemos de una manera completamente análoga

$$I_2=f^{(3)}(0)\frac{h^4}{3}-4f'(0)\,h^2-8h\,[f(h)+2f(0)]+24\int_{0}^{h} f(x)\,dx \qquad (3.32)$$

Al sumar las relaciones (3.31) y (3.32), obtenemos la siguiente igualdad:

$$\int_{-h}^{+h} f(x)\,dx=\frac{f(-h)+4f(0)+f(+h)}{6}\,2h+\frac{I_1+I_2}{24}. \qquad (3.33)$$

Para estimar $\frac{I_1+I_2}{24}$, apliquemos la fórmula del valor medio a las integrales I_1 e I_2, teniendo en cuenta que las funciones $(x+h)^3\left(x-\frac{h}{3}\right)$ y $(x-h)^3\left(x+\frac{h}{3}\right)$ son no positivas en los segmentos $[-h,\ 0]$ y $[0,\ +h]$, respectivamente.

Obtenemos la existencia de un punto ξ_1 en el segmento $[-h,\ 0]$ y de un punto ξ_2 en el segmento $[0,\ +h]$ tales que

$$\frac{I_1+I_2}{24}=\frac{1}{24}\left[f^{(4)}(\xi_1)\int_{-h}^{0}(x+h)^3\left(x-\frac{h}{3}\right)dx+\right.$$

$$\left.+f^{(4)}(\xi_2)\int_{0}^{+h}(x-h)^3\left(x+\frac{h}{3}\right)dx\right]=\frac{-h^5}{90}\cdot\frac{f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)}{2}.$$

Empleando de nuevo la observación al final del p. 1, obtenemos que en el segmento $[-h, +h]$ existe un punto η tal que

$$\frac{I_1+I_2}{2h}=\frac{-h^4}{90}f^{(4)}(\eta). \tag{3.34}$$

De (3.33) y (3.34) obtenemos, definitivamente,

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx=\frac{[f(-h)+4f(0)+f(h)]}{6}2h+\overline{R}, \tag{3.35}$$

donde

$$\overline{R}=-\frac{(2h)^5}{2880}f^{(4)}(\eta). \tag{3.36}$$

Dado que la magnitud $\frac{[f(-h)+4f(0)+f(h)]}{6}2h$ es el área de la figura que se encuentra por debajo de la parábola y es rayada en la fig. 3.10, las fórmulas (3.35) y (3.36) demuestran que el error, cometido al sustituir $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ por dicha área, es del orden de h^5.

Para calcular la integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, igual que en los métodos de los rectángulos y de los trapecios, representemos esta integral en forma de la suma de n integrales

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx.$$

Aplicando las fórmulas (3.35) y (3.36) a cada una de estas integrales, llegamos a la fórmula de Simpson (3.29) con la expresión del término residual (3.30).

Comparando el término residual (3.30) con los términos residuales (3.20) y (3.25), nos convencemos de que la fórmula de Simpson da mayor exactitud que las fórmulas de los rectángulos y de los trapecios.

Para ilustrar la aplicación de la fórmula de Simpson, vamos a calcular la integral $I(x_0)=\int_{0}^{x_0} e^{-x^2}\,dx$* limitándonos, para que sea

*) La integral considerada no se expresa mediante las funciones elementales. Esta integral se usa ampliamente en la física estadística, en la teoría de la conductibilidad calorífica y de la difusión.

más simple, a los valores x_0 del segmento $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$. Tomando $f(x) = e^{-x^2}$ y calculando la derivada $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$, nos convencemos fácilmente de que para todos los x del segmento $0 \leqslant x \leqslant x_0 \leqslant 1$, en todo caso, $|f^{(4)}(x)| \leqslant 20$. Partiendo de la estimación (3.30), podemos afirmar que $|R| \leqslant \frac{1}{144n^4}$. Por lo tanto, al dividir el segmento $[0, x_0]$ sólo en cinco partes iguales y al sustituir la integral considerada por la suma del miembro derecho de la fórmula de Simpson, calculamos esta integral con exactitud de hasta $\frac{1}{144 \cdot 5^4} = \frac{1}{90\,000}$.

5. Observaciones finales. Cada uno de los métodos, expuestos en el presente capítulo para calcular raíces de la ecuación y las integrales definidas *contiene un algoritmo bien formulado* para realizar los cálculos. Otra particularidad de los métodos expuestos es *la trivialidad* de las operaciones de cálculo que deben efectuarse en cada paso separado. Las dos particularidades aseguran el amplio uso de los métodos expuestos para realizar cálculos con los ordenadores modernos de acción rápida.

Anteriormente, para calcular aproximadamente la integral (3.18) de la función $f(x)$, dividimos el segmento fundamental $[a, b]$ en un número bastante grande n de segmentos parciales *iguales* de una misma longitud h, sustituyendo posteriormente la función $f(x)$ por un polinomio de grado nulo, primero o segundo, respectivamente, en todo segmento parcial.

El error que aparece en este método de ningún modo toma en consideración las propiedades individuales de la función $f(x)$. Por eso, lógicamente, surge la idea de variar los puntos del segmento fundamental $[a, b]$ y para toda función fijada $f(x)$ elegir una partición óptima del segmento fundamental $[a, b]$ en n segmentos parciales, no iguales, hablando en general, uno a otro, tal que asegure la magnitud mínima del error de la fórmula aproximada dada.

En el Complemento del cap. 5 nos detendremos en la realización de dicha idea perteneciente a A. N. Tijonov y S. S. Gaysarián.

Capítulo 4

TEORÍA DE LAS SERIES NUMÉRICAS

Ya en el curso elemental nos encontramos con sumas que comprenden un número *infinito* de sumandos (por ejemplo, con la suma de un número infinito de elementos de la progresión geométrica). Estas sumas, llamadas *series*, se examinan en el presente capítulo. Estableceremos que en algunas condiciones las series poseen propiedades análogas a las de las sumas finitas.

§ 1. Concepto de serie numérica

1. La serie y sus sumas parciales. Series convergentes y divergentes. Consideremos una sucesión numérica infinita $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ y con los elementos de esta sucesión compongamos formalmente la expresión de la forma

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \qquad (4.1)$$

La expresión (4.1) suele llamarse *serie numérica* o simplemente *serie*. Los elementos u_k, de los que está formada la expresión (4.1), suelen llamarse *términos de la serie*. Como regla, para designar la serie utilizamos el símbolo de suma.

La suma de los n primeros términos de una serie dada se denominará n-ésima suma parcial de la serie dada y se denotará con el símbolo S_n.

Así, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. *La serie* (4.1) *se denomina convergente si converge la sucesión* $\{S_n\}$ *de las sumas parciales de esta serie. Además, el límite S de la sucesión de las sumas parciales* $\{S_n\}$ *se denomina suma de la serie dada.* De este modo, podemos escribir formalmente la igualdad de la serie convergente que tiene la suma S

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Si $\lim_{n\to\infty} S_n$ *no existe, la serie se denomina divergente.*

Subrayemos que el concepto de suma se define solamente para la serie convergente, y, a diferencia del concepto de suma finita, se introduce por medio del paso límite *).

Observemos que la consideración de series numéricas es una nueva forma de estudiar sucesiones numéricas, puesto que: 1) a toda serie dada le corresponde unívocamente la sucesión de sus sumas parciales, 2) a toda sucesión dada $\{S_n\}$ le corresponde unívocamente una serie, para la cual esta sucesión es la de sus sumas parciales (baste tomar los términos de la serie iguales a $u_k = S_k - S_{k-1}$, para $k > 1$ y $u_1 = S_1$).

Uno de los problemas fundamentales de la teoría de series numéricas es establecer los criterios, según los cuales se pueda resolver el problema de convergencia o divergencia de la serie dada.

EJEMPLOS DE SERIES NUMÉRICAS.

Examinemos la convergencia de la serie

$$1-1+1-1+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}. \tag{4.2}$$

Debido a que la sucesión de sus sumas parciales $S_1=1$, $S_2=0, \ldots, S_{2n-1}=1$, $S_{2n}=0, \ldots$ no tiene límite, la serie (4.2) diverge.

2. Consideremos la serie compuesta por elementos de la progresión geométrica:

$$1+q+q^2+\ldots+q^k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}. \tag{4.3}$$

La n-ésima suma parcial S_n de esta serie tiene, para $q \neq 1$, la forma

$$S_n = 1+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}. \tag{4.4}$$

Evidentemente, cuando $|q|<1$, la sucesión de las sumas parciales S_n converge y tiene un límite igual a $\frac{1}{1-q}$. De este modo, cuando $|q|<1$ la serie considerada converge y tiene una suma igual a $\frac{1}{1-q}$.

Para $|q|>1$, de la igualdad (4.4) es obvio que la sucesión S_n (y, por tanto, la serie considerada) diverge. Si $|q|=1$, se ve inmediatamente la divergencia de la serie (4.3). En efecto, cuando $q = +1$ y $S_n = n$, la divergencia de la sucesión S_n es evidente,

*) En las matemáticas modernas, junto al concepto de suma anteriormente dado, se introduce el de suma de la serie en varios sentidos generalizados. Esto permite sumar, en sentidos generalizados, muchas series divergentes (véase el Complemento 3 del presente capítulo).

mientras que para $q = -1$ la serie (4.3) se transforma en la serie (4.2), anteriormente examinada.

3. Sea x cualquier número fijado. Demostremos que la serie

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\ ^{*)} \qquad (4.5)$$

converge y tiene la suma igual a e^x.

En el p. 2 del § 5 (cap. 8, tomo 1) hemos desarrollado la función e^x por la fórmula de Maclaurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \qquad (4.6)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1). \qquad (4.7)$$

De las fórmulas (4.6) y (4.7) obtenemos

$$\left| \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right] - e^x \right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}. \qquad (4.8)$$

Denotando mediante S_n la n-ésima suma parcial de la serie (4.5), podemos escribir la desigualdad (4.8) en la forma

$$|S_n - e^x| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}. \qquad (4.9)$$

Puesto que para cualquier x fijo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0\ ^{**)}$$

el segundo miembro de la desigualdad (4.9) es elemento de una sucesión infinitesimal. Pero esto significa que la sucesión $\{S_n\}$ *converge al número* e^x. Por lo tanto, la serie (4.5) también converge y tiene la suma e^x.

4. De modo análogo, empleando la fórmula de Maclaurin para las funciones sen x y cos x se puede demostrar que las series

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

y

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-2}}{(2k-2)!}$$

*) Mediante el símbolo 0! hemos denotado el número 1.

**) Véase el ejemplo 3 (p. 3, § 3, cap. 3, tomo 1).

convergen para cualquier valor fijo de x y tienen unas sumas iguales a sen x y cos x, respectivamente. (Dejamos a cargo del lector convencerse de esto.)

2. Criterio de Cauchy de convergencia de una serie. Dado que, por definición, la cuestión sobre la convergencia de una serie es equivalente a la cuestión sobre la convergencia de sus sumas parciales, la condición necesaria y suficiente de convergencia de la serie dada se obtiene al enunciar el criterio de convergencia de Cauchy para la sucesión de sus sumas parciales. Para mayor comodidad, aduzcamos la formulación del criterio de Cauchy para la sucesión. *Para que la sucesión $\{S_n\}$ sea convergente, es necesario y suficiente que para cualquier número positivo ε exista un número N tal que para todos los números n que satisfacen la condición $n \geqslant N$ y para todos los p naturales ($p = 1, 2, 3, \ldots$)*

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Como corolario de esta afirmación, obtenemos el siguiente teorema fundamental.

Teorema 4.1 (**criterio de Cauchy para la serie**). *Para que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converja es necesario y suficiente que para cualquier número positivo ε exista un número N tal que para todos los números n que satisfacen la condición $n \geqslant N$ y para todos los números naturales p*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon. \qquad (4.10)$$

Para demostrar este teorema es suficiente que la magnitud bajo el signo del módulo en la desigualdad (4.10) sea igual a la diferencia de las sumas parciales $S_{n+p} - S_n$. Hemos de subrayar que, en esencia, el criterio de convergencia de Cauchy es de interés teórico. Como regla, su empleo para establecer la convergencia o la divergencia de unas u otras series concretas tiene dificultades. Por eso, además del criterio de Cauchy no hay que establecer otros criterios eficaces de convergencia y divergencia de las series.

Del teorema 4.1 es fácil extraer dos corolarios elementales, pero importantes.

Corolario 1. *Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge, la sucesión $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ es infinitesimal.*

La magnitud r_n suele llamarse *n-ésimo resto de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Para demostrar el corolario 1, es suficiente demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que $|r_n| \leqslant \varepsilon$ cuando $n \geqslant N$.

La última desigualdad se desprende inmediatamente de la desigualdad (4.10), válida para cualquier $p = 1, 2, 3, \ldots$ y del teorema 3.13, t. 1.

Corolario 2 (condición necesaria de convergencia de una serie). *Para la convergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *es necesario que la sucesión* $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *de los términos de esta serie sea infinitesimal.*

Basta demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ y para la serie convergente dada existe un número N_0 tal que, cuando $n \geqslant N_0$, $|u_n| < \varepsilon$. Sea dado cualquier $\varepsilon > 0$. Según el teorema 4.1, existe un número N tal que para $n \geqslant N$ y para *cualquier* p natural se cumple la desigualdad (4.10). En particular, para $p = 1$ esta desigualdad adquiere la forma

$$|u_{n+1}| < \varepsilon \quad (\text{para } n \geqslant N). \tag{4.11}$$

Si ahora hacemos el número N_0 igual a $N_0 = N + 1$, entonces, para $n \geqslant N_0$, en virtud de la desigualdad (4.11), obtenemos $|u_n| < \varepsilon$, lo que era necesario demostrar.

En otras palabras, el corolario 2 puede enunciarse del modo siguiente: *para la convergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *es necesario que* $\lim_{k \to \infty} u_k = 0$. De este modo, cuando investigamos la serie dada en cuanto a la convergencia debemos, ante todo, ver si tiende a cero el k-ésimo término de esta serie cuando $k \to \infty$. Si no es así, la serie, sin duda, diverge. Así, por ejemplo, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5k^2 + 300k}$$

a ciencia cierta diverge, puesto que

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{5k^2 + 300k} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

De manera análoga, la divergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$, anteriormente examinada, se desprende de que $\lim_{k \to \infty} (-1)^k$ no existe.

Sin embargo, subrayemos que la tendencia a cero del k-ésimo término de la serie, para $k \to \infty$, es *solamente condición necesaria, pero no suficiente para la convergencia de la serie.*

A título de ejemplo consideramos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \quad (4.12)$$

Esta serie suele llamarse *serie armónica*. Es evidente que para la serie armónica se cumple la condición necesaria de convergencia, puesto que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Sin embargo, demostremos que esta serie diverge. Empleemos el criterio de Cauchy. Demostremos que para el número positivo $\varepsilon = 1/2$ *no existe un número N tal que para $n \geqslant N$* y cualquier p natural

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon = \frac{1}{2}. \quad (4.13)$$

En efecto, si tomamos $p = n$, para n, *por más grande que sea*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2}.$$

(Hemos tomado en consideración que en la última suma hay n sumandos y el mínimo entre ellos es igual a $1/2n$.)

Así pues, la desigualdad (4.13) no se cumple, por más grande que sea el número N. En virtud del criterio de Cauchy, la serie (4.12) diverge.

3. Dos propiedades relacionadas con la convergencia de una serie.

1°. *La eliminación de un número finito de términos de la serie (o la adición de un número finito de términos a la serie) no influye en la convergencia ni en la divergencia de esta serie.*

Para cerciorarse de esto, es suficiente observar que después de eliminar (o adicionar) términos, todas las sumas parciales de esta serie, partiendo de un número, varían en una misma constante.

2°. *Si c es una constante diferente de cero, $u'_k = cu_k$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ converge si, y sólo si, converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.*

Si denotamos las n-ésimas sumas parciales de las series consideradas mediante S'_n y S_n, respectivamente, entonces, es obvio que $S'_n = cS_n$. De la última igualdad se desprende que $\lim_{n\to\infty} S'_n$ existe si, y sólo si, existe $\lim_{n\to\infty} S_n$.

§ 2. Series con términos positivos

1. Condición necesaria y suficiente de convergencia de una serie con términos positivos. En el presente párrafo consideraremos las series *cuyos términos no son negativos.* Siguiendo la tradición establecida, las denominaremos *series con términos positivos* (aunque sea más correcto usar el término «series con términos no negativos»). Las series, cuyos términos son estrictamente mayores que cero, se denominarán *series con términos estrictamente positivos.*

Por sí mismas, las series con términos positivos se encuentran con frecuencia en aplicaciones. Además, su estudio preliminar facilita el estudio de las series con términos de cualquier signo. A continuación, para subrayar que se trata de una serie con términos positivos, denotaremos con frecuencia los términos de esta serie con el símbolo p_k en vez de a_k.

A la vez, podemos señalar la propiedad característica fundamental de la serie con términos positivos: *la sucesión de las sumas parciales de esta serie es no decreciente.*

Esto permite demostrar la siguiente afirmación.

Teorema 4.2. *Para que la serie con términos positivos converja, es necesario y suficiente que la sucesión de las sumas parciales de esta serie sea acotada.*

La *necesidad* se debe a que toda sucesión convergente es acotada (en virtud del teorema 3.8, t. 1).

La *suficiencia* se desprende de que la sucesión de las sumas parciales no decrece y, por tanto, para la convergencia de esta sucesión es suficiente que sea acotada (en virtud del teorema 3.15, t. 1).

2. Criterios de comparación. Aquí estableceremos algunos criterios que permitirán sacar la conclusión sobre la convergencia (o la divergencia) de la serie considerada *comparándola con otra serie cuya convergencia (o divergencia) se conoce de antemano.*

Teorema 4.3. *Sean* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *dos series con términos positivos. Sea, luego, que para todos los números* k *es válida la desigualdad*

$$p_k \leqslant p'_k. \tag{4.14}$$

Entonces, la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *trae consigo la convergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *y la divergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *trae consigo la divergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos las n-ésimas sumas parciales de las series $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ mediante S_n y S'_n, respectivamente. De la

desigualdad (4.14) deducimos que $S_n \leqslant S'_n$. La última desigualdad significa que la acotación de la sucesión de las sumas parciales $\{S'_n\}$ provoca la acotación de la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}$ y, viceversa, la no acotación de la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}$ produce la no acotación de la sucesión de las sumas parciales $\{S'_n\}$. En virtud del teorema 4.2, el teorema 4.3 queda demostrado.

OBSERVACION 1. En la condición del teorema 4.3 se puede exigir que la desigualdad (4.14) se cumpla no para todos los números k, sino *solamente a partir de cierto número k*. En efecto, en virtud del p. 3 del § 1, la eliminación de un número finito de términos no influye en la convergencia de la serie.

OBSERVACION 2. *El teorema 4.3 sigue siendo válido si en la condición de este teorema la desigualdad (4.14) se sustituye por la siguiente desigualdad*

$$p_k \leqslant cp'_k \tag{4.15}$$

donde c es cualquier constante positiva. En efecto, conforme al p. 3 del § 1, la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ es equivalente a la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (cp'_k)$. Además, se puede exigir que la desigualdad (4.15) se cumpla solamente partiendo de un número bastante grande k.

Corolario del teorema 4.3. *Si $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ es una serie con términos positivos, $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$, una serie con términos estrictamente positivos, y existe el límite finito entonces la*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L,$$

convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ conlleva la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ y la divergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ produce divergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

DEMOSTRACION. Dado que $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L$, según la definición del límite, para $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para $k \geqslant N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon.$$

Por tanto, cuando $k \geqslant N$, es válida la desigualdad $p_k < (L + \varepsilon)\, p'_k$. La última desigualdad coincide con la desigualdad (4.15) para $c = L + \varepsilon$. En virtud de la observación 2 del teorema 4.3, el corolario queda demostrado.

Teorema 4.4. Sean $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *dos series con términos estrictamente positivos. Sea también que para todos los números k es válida la desigualdad*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k}. \tag{4.16}$$

Entonces, la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *conduce a la convergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *y la divergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *conduce a la divergencia de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

DEMOSTRACIÓN. Escribamos la desigualdad (4.16) para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, donde n es un número cualquiera. Tendremos,

$$\frac{p_2}{p_1} \leqslant \frac{p'_2}{p'_1},$$
$$\frac{p_3}{p_2} \leqslant \frac{p'_3}{p'_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \frac{p'_n}{p'_{n-1}}.$$

Multiplicando término a término todas las desigualdades escritas obtenemos

$$\frac{p_n}{p_1} \leqslant \frac{p'_n}{p'_1} \quad \text{o bien} \quad p_n \leqslant \frac{p_1}{p'_1}\, p'_n.$$

Dado que en la última desigualdad la magnitud $c = p_1/p'_1$ es *constante, positiva e independiente del número* n, conforme a la observación 2 del teorema 4.3, el teorema 4.4 queda demostrado.

OBSERVACIÓN 3. Se puede exigir que la desigualdad (4.16) del teorema 4.4 no se cumpla para todos los números k, sino *a partir del número* k (pues la eliminación de un número finito de primeros términos no influye en la convergencia de la serie).

Los dos teoremas demostrados en el presente punto se denominan *teoremas de comparación* o *criterios de comparación*.

Aduzcamos los ejemplos de aplicación de los criterios de comparación.

1. Investiguemos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3+b^k}, \quad \text{donde } b>0.$$

Si $b\leqslant 1$, el k-ésimo término de la serie considerada no tiende a cero cuando $k\to\infty$. Por lo tanto, se infringe la condición necesaria de convergencia de la serie y la serie diverge. Si $b>1$, entonces, puesto que para cualquier número k es válida la desigualdad

$$\frac{1}{3+b^k}<\frac{1}{b^k}$$

y la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b^k}$ converge, el teorema 4.3 de comparación permite afirmar que la serie considerada es convergente.

2. Investiguemos en cuanto a la convergencia, para todo $\alpha\leqslant 1$, la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots \tag{4.17}$$

Esta serie se denomina con frecuencia *serie armónica generalizada*. Debido a que, cuando $\alpha\leqslant 1$, para cualquier número k es válida la desigualdad

$$\frac{1}{k^\alpha}\geqslant\frac{1}{k}$$

y la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge *), el teorema de comparación 4.3 permite afirmar que la serie (4.17) es divergente para cualquier $\alpha\leqslant 1$.

3. Criterios de d'Alembert y de Cauchy. Entre los criterios de comparación hay dos muy usados, de convergencia de las series con términos positivos, el de d'Alembert y el de Cauchy. Los criterios de d'Alembert y de Cauchy se basan en la comparación de la serie considerada con una serie compuesta de términos de la progresión geométrica, a saber, con la serie convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k=q+q^2+q^3+\ldots, \quad |q|<1, \tag{4.18}$$

o con la divergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1=1+1+1+\ldots \tag{4.19}$$

*) La divergencia de la serie armónica se establece en el p. 2 del § 1.

Teorema 4.5 (criterio de d'Alembert)*). I. *Si para todos los números k, o, por lo menos, partiendo de un número k, es válida la desigualdad*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1^{**)} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1\right). \tag{4.20}$$

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *converge (diverge).*

II. *Si existe el límite*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L \tag{4.21}$$

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *converge cuando* $L < 1$ *y diverge cuando* $L > 1$.

El teorema II suele llamarse *criterio de d'Alembert en forma límite*. En esta forma se usa con la mayor frecuencia.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los teoremas I y II por separado.

1) Para demostrar el teorema I pongamos $p'_k = q^k$ ($p'_k = 1$). Entonces $\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = q$, donde $q < 1$, $\left(\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = 1\right)$, y podemos escribir la desigualdad (4.20) en la forma

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k}\right). \tag{4.22}$$

Dado que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ que coincide con la serie (4.18) ((4.19)) converge (diverge), la desigualdad (4.22), basándose en el teorema de comparación 4.4, garantiza la convergencia (divergencia) de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$. El teorema I queda demostrado.

2) Demostremos ahora el teorema II. Si $L < 1$, existe un número *positivo* ε tal que $L = 1 - 2\varepsilon$ y $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Según la definición del límite de una sucesión, para dicho ε existe un número N tal que para $k \geqslant N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon = 1 - \varepsilon. \tag{4.23}$$

El número $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ hace las veces de q en el teorema I. La serie converge.

*) Jacques Leron d'Alembert, matemático y filósofo francés (1717—1783).

**) Además, se supone, naturalmente, que todos los miembros de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ (por lo menos, partiendo de cierto número) son *estrictamente* positivos.

Si $L > 1$, existe un número *positivo* ε tal que $L = 1 + \varepsilon$ y $L - \varepsilon = 1$. En este caso, basándose en la desigualdad izquierda de (4.24) obtenemos

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1 \quad (\text{para } k \geqslant N).$$

La serie diverge de acuerdo con el teorema I. El teorema 4.5 queda completamente demostrado.

OBSERVACIONES AL TEOREMA 4.5. 1) Prestemos la atención a que en el teorema 4.5 (I) *no se puede sustituir* la desigualdad $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1$ (para todos los k, partiendo de cierto k) por $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$.

En efecto, conforme a lo demostrado anteriormente, la serie armónica (4.12) diverge, pero para esta serie se tiene $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ (para todos los números k).

2) Si en las condiciones del teorema (4.5) (II) $L = 1$, no se puede decir nada concreto sobre la convergencia de la serie (o sea, para $L = 1$ el criterio de d'Alembert «no funciona»). En efecto, para la serie armónica (4.12) $L = 1$, además como sabemos, esta serie diverge. Al mismo tiempo, para la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{4.24}$$

también $L = 1$, pero, como se mostrará en el punto siguiente, esta serie converge.

Teorema 4.6 (criterio de Cauchy). I. *Si para todos los números k, o, por lo menos, partiendo de un número k, es válida la desigualdad*

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1) \tag{4.25}$$

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ converge (diverge).

II. *Si existe el límite*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L, \tag{4.26}$$

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ converge cuando $L < 1$ y diverge cuando $L > 1$.

El teorema II suele llamarse *criterio de Cauchy en forma límite*.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los teoremas I y II por separado. 1) Para demostrar el teorema I adoptemos $p'_k = q^k$ ($p'_k = 1$). Entonces, de la desigualdad (4.25) obtenemos

$$p_k \leqslant p'_k \quad (p^k \geqslant p'_k) \tag{4.27}$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} r'_k$ que compete con la serie (4.18) ((4.19)) converge (diverge), a base del teorema de comparación 4.3, la desigualdad (4.27) garantiza la convergencia (divergencia) de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$. El teorema 4.6 (I) queda demostrado.

2) Para demostrar el teorema (4.6) (II) es necesario repetir literalmente el esquema de demostración del teorema 4.5 (II), sustituyendo en todos los razonamientos por $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ $\sqrt[k]{p_k}$.

El teorema 4.6 queda completamente demostrado.

OBSERVACIONES AL TEOREMA 4.6. 1) Al igual que en el teorema anterior, en el 4.6 (I) no se puede sustituir la desigualdad $\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1$ por $\sqrt[k]{p_k} < 1$.

2) Si $L = 1$, el criterio de Cauchy en forma límite «no funciona». Podemos referirnos a dos ejemplos mencionados en la observación correspondiente del criterio de d'Alembert.

3) Surge la pregunta: ¿cuál de los dos criterios, de d'Alembert o de Cauchy, es el más fuerte? Analicemos esta cuestión respecto a los criterios de d'Alembert y de Cauchy tomados *en forma límite*. Se puede demostrar que *de la existencia del límite* (4.21) *se desprende la existencia del límite* (4.26) *y la igualdad de estos límites*. (La demostración se da en el complemento 1 del presente capítulo). La afirmación inversa es inválida. En efecto, es fácil cerciorarse de que para la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}} \tag{4.28}$$

el límite (4.26) existe y es igual a 1/2, mientras que el límite (4.21) no existe en absoluto. De este modo, el criterio de Cauchy es más fuerte que el de d'Alembert, puesto que cada vez que funciona el criterio de d'Alembert, funciona también el de Cauchy y, al mismo tiempo, existen series (por ejemplo, la serie (4.28)), para las cuales funciona el criterio de Cauchy y no funciona el de d'Alembert. A pesar de esto, en la práctica, el criterio de d'Alembert se usa con mayor frecuencia que el de Cauchy.

EJEMPLOS. 1) Investiguemos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!} \tag{4.29}$$

en cuanto a la convergencia. Apliquemos el criterio de d'Alembert en forma límite. Tenemos

$$p_k=\frac{(\sqrt{k})^k}{k!},\quad \frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{(\sqrt{k+1})^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{(\sqrt{k})^k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k/2}. \tag{4.30}$$

Basándose en (4.30),

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k/2}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k/2}=0\cdot\sqrt{e}=0<1,$$

es decir, la serie (4.29) converge.

2) Investiguemos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} \tag{4.31}$$

en cuanto a la convergencia. Apliquemos el criterio de Cauchy en forma límite. Tenemos

$$\sqrt[k]{p_k}=\frac{\sqrt[k]{k}}{2}. \tag{4.32}$$

De acuerdo con (4.32),

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}\,^{*)}=\frac{1}{2}<1.$$

De este modo, el criterio de Cauchy establece la convergencia de la serie (4.31).

4. Criterio integral de Cauchy — Maclaurin. Los criterios de d'Alembert y de Cauchy no sirven para aclarar la cuestión sobre la convergencia de algunas series con términos positivos que se encuentran frecuentemente. Así, por ejemplo, empleando estos criterios, no se puede aclarar es o no convergente la serie armónica generalizada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \tag{4.33}$$

(α es cualquier número real).

Es verdad que al final del punto 2 hemos establecido que, para $\alpha\leqslant 1$, la serie (4.33) diverge, pero sigue pendiente la cuestión

---

*) Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$, hay que hallar por logaritmos la expresión $x^{1/x}$ y aplicar la regla de L'Hospital.

sobre la convergencia de esta serie para $\alpha > 1$. En este punto estableceremos otro criterio general de convergencia de una serie con términos positivos, del cual se desprende, en particular, la convergencia de la serie (4.33) para $\alpha > 1$.

Teorema 4.7. **(teorema de Cauchy — Maclaurin).** *Sea que la función $f(x)$ es no negativa y no crece sobre toda la semirrecta $x \geqslant m$, donde m es cualquier número fijo. Entonces, la serie numérica*

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots \qquad (4.34)$$

converge si, y sólo si, (para $n \to \infty$) existe un límite de la sucesión

$$a_n = \int_m^n f(x)\,dx. \qquad (4.35)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea k cualquier número que satisface la condición $k \geqslant m+1$ y sea x cualquier valor del argumento del segmento $k-1 \leqslant x \leqslant k$. Dado que, según la condición, la función $f(x)$ no crece en dicho segmento, para todos los x de dicho segmento son válidas las desigualdades

$$f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k-1). \qquad (4.36)$$

Siendo acotada y monótona, la función $f(x)$ es integrable en el segmento $k-1 \leqslant x \leqslant k$ (véase el p. 5 del § 4, cap. 1). Más aún, de las desigualdades (4.36) y de la propiedad 3° (véase el p. 1 del § 6, cap. 1) se desprende que

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx$$

o bien

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant f(k-1). \qquad (4.37)$$

Hemos establecido las desigualdades (4.37) para todo $k \geqslant m+1$. Escribamos estas desigualdades para los valores $k = m+1$, $m+2, \dots, n$, donde n es cualquier número que supera a m.

$$f(m+1) \leqslant \int_m^{m+1} f(x)\,dx \leqslant f(m),$$

$$f(m+2) \leqslant \int_{m+1}^{m+2} f(x)\,dx \leqslant f(m+1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(n-1).$$

Sumando término a término las desigualdades anotadas, obtenemos

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{m}^{n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} f(k). \qquad (4.38)$$

Convengamos denotar por el símbolo S_n la n-ésima suma de la serie (4.34), igual a

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} f(k).$$

Adoptando esta denotación y teniendo en cuenta la denotación de (4.35), podemos escribir las desigualdades (4.38) del modo siguiente:

$$S_n - f(m) \leqslant a_n \leqslant S_{n-1}. \qquad (4.39)$$

Las desigualdades (4.39) permiten demostrar fácilmente el teorema. En efecto, la fórmula (4.35) evidencia que la sucesión $\{a_n\}$ es no decreciente. Por tanto, para que esta sucesión sea convergente, es necesario y suficiente que esté acotada. En virtud del teorema 4.2, para que la serie (4.34) sea convergente, es necesario y suficiente que esté acotada sucesión $\{S_n\}$. De las desigualdades (4.39) se desprende que la sucesión $\{S_n\}$ está acotada si, y sólo si, lo está la sucesión $\{a_n\}$, o sea, si, y sólo si, la sucesión $\{a_n\}$ converge. El teorema queda demostrado.

EJEMPLOS. 1) Primero apliquemos el criterio integral de Cauchy — Maclaurin para aclarar si es o no convergente la serie armónica generalizada (4.33). Puesto que la serie (4.33) puede considerarse como una serie de la forma (4.34) para $m = 1$, $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ y la función $f(x)$ decrece y es positiva en la semirrecta $x \geqslant 1$, entonces la cuestión sobre la convergencia de la serie (4.33) es equivalente a la cuestión sobre la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$, donde

$$a_n = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x=1}^{x=n} = \dfrac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln x\,\Big|_{x=1}^{x=n} = \ln n & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

De la forma de los elementos a_n se desprende que la sucesión $\{a_n\}$ diverge si $\alpha \leqslant 1$ y converge si $\alpha > 1$, además, en el último caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\alpha-1}$. De este modo, *la serie* (4.33) *diverge si* $\alpha \leqslant 1$ (ya lo hemos establecido anteriormente por otro procedimiento) *y converge si* $\alpha > 1$. En particular, para $\alpha = 2$ la serie (4.33) se transforma en la serie (4.24) cuya convergencia se puede afirmar ahora.

2) Investiguemos la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k}, \tag{4.40}$$

en cuanto a la convergencia aquí β es un número real positivo fijo. La serie (4.40) puede considerarse como una serie de la forma (4.34) para $m = 2$ y $f(x) = \frac{1}{x \ln^{\beta} x}$. Como la función $f(x)$ es no negativa y no crece en la semirrecta $x \geqslant 2$, la cuestión sobre la convergencia o la divergencia de la serie (4.40) es equivalente a la cuestión sobre la convergencia o la divergencia de la sucesión $\{a_n\}$ donde

$$a_n = \int_2^n \frac{1}{x \ln^{\beta} x} dx = \begin{cases} \frac{\ln^{1-\beta} x}{1-\beta}\Big|_{x=2}^{x=n} = \frac{\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1, \\ \ln \ln x \Big|_{x=2}^{x=n} = \ln \ln n - \ln \ln 2 & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

De la forma de los elementos a_n se desprende que la sucesión $\{a_n\}$ converge si $\beta > 1$ y diverge si $\beta \leqslant 1$. De este modo, la serie (4.40) *converge si $\beta > 1$ y diverge si $\beta \leqslant 1$.*

5. **Criterio de Raabe.** Los criterios de d'Alembert y de Cauchy se basan en la comparación de la serie considerada con la serie que constituye la suma de la progresión geométrica. Lógicamente, surge la idea de obtener criterios más finos, basados en la comparación de la serie considerada con otras series estándar, convergentes o divergentes «más lentamente» que la serie en caso de la progresión geométrica.

En este punto estableceremos el criterio basado en la comparación de la serie considerada con la estándar, examinada en el punto anterior,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots \tag{4.41}$$

Teorema 4.8 (criterio de Raabe) *). I. *Si para todos los números k o, por lo menos, a partir de cierto número k es válida la desigualdad* **)

$$k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \geqslant q > 1 \left\{k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \leqslant 1\right\}, \tag{4.42}$$

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *converge (diverge).*

II. *Si existe el límite*

$$\lim_{k \to \infty} k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) = L, \tag{4.43}$$

---

*) Joseph Ludwig Raabe, matemático suizo (1801—1859).

**) Naturalmente, se supone además que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, a partir, por lo menos, de cierto número, tiene términos *estrictamente positivos.*

la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *converge cuando* $L > 1$ *y diverge cuando* $L < 1$. El teorema II suele denominarse *criterio de Raabe en forma límite.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los teoremas I y II por separado.

1) Para demostrar el teorema I, escribamos la desigualdad (4.42) en la forma

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant 1-\frac{q}{k} \left\{\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1-\frac{1}{k}\right\}. \qquad (4.44)$$

Dado que $q > 1$, existe un número α que satisface las desigualdades $q > \alpha > 1$. Al desarrollar la función $(1+x)^{\alpha}$ por la fórmula de Maclaurin con el término residual en forma de Peano (véase el p. 2 del § 15, cap. 8, t. 1), tendremos

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x + \varepsilon(x).$$

Adoptando $x = -1/k$ en la última fórmula obtenemos

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\alpha} = 1-\frac{\alpha}{k}+\varepsilon\left(\frac{1}{k}\right). \qquad (4.45)$$

Como la sucesión $\frac{\varepsilon(1/k)}{1/k}$ es infinitesimal, a partir de cierto número k_0, es válida la desigualdad

$$\frac{\varepsilon(1/k)}{1/k} \leqslant q-\alpha. \qquad (4.46)$$

Comparando (4.45) y (4.46), obtenemos la desigualdad

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\alpha} \geqslant 1-\frac{q}{k} \quad (\text{si } k \geqslant k_0). \qquad (4.47)$$

La comparación de las desigualdades (4.44) y (4.47) da

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \left(1-\frac{1}{k}\right)^{\alpha} \left\{\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1-\frac{1}{k}\right\} \quad (\text{si } k \geqslant k_0)$$

Las últimas desigualdades pueden anotarse en la forma

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{\frac{1}{k^{\alpha}}}{\frac{1}{(k-1)^{\alpha}}} \left\{\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}}\right\} \quad (\text{si } k \geqslant k_0). \qquad (4.48)$$

Como la serie (4.41) converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha = 1$, las desigualdades (4.48) y el teorema de comparación (4.4) permiten afirmar que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ converge (diverge). El teorema I queda demostrado.

2) Al igual que en caso de los criterios de d'Alembert y de Cauchy, reduzcamos el teorema II al teorema I. Sea primero $L > 1$. Adoptemos $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$, $q = 1+\varepsilon = L-\varepsilon$. Según la definición de límite (4.43), para este ε se puede indicar un número k_0 partiendo del cual $\left|k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)-L\right| < \varepsilon$ y, por tanto, es válida la desigualdad izquierda de (4.42). Pero si $L < 1$, adoptamos

$\varepsilon = 1 - L$ y, empleando la definición de límite (4.43), obtenemos que, a partir de un número k_0, es válida la desigualdad derecha (4.42). El teorema 4.8 queda completamente demostrado.

OBSERVACIÓN. Señalemos que en el teorema 4.8 (I) en la desigualdad izquierda de (4.42) no se puede tomar $q = 1$ (con esto la convergencia de la serie puede dejar de tener lugar). Si $L = 1$, el teorema 4.8 (II) «no funciona» (es posible tanto la convergencia como la divergencia de la serie).

EJEMPLO. Investigar la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k, \quad \text{donde } p_k = a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right)} \quad (a = \text{const} > 0)$$

en cuanto a la convergencia (divergencia).

Es fácil comprobar que los criterios de d'Alembert y de Cauchy no «funcionan» en caso de esta serie. Apliquemos el criterio de Raabe. Es fácil comprobar que

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=\frac{a^{-1/k}-1}{\left(-\frac{1}{k}\right)}.$$

No es difícil comprender que, para $k \to \infty$, la última fracción tiende a la derivada de la función a^x en el punto $x = 0$, o sea, tiende a $\ln a$. En virtud del criterio de Raabe, la serie considerada *converge si* $\ln a > 1$, *es decir, si* $a > e$, *y diverge si* $\ln a < 1$, *es decir, si* $a < e$. Si $a = e$, para aclarar que la serie converge o diverge se necesita una investigación complementaria, puesto que el criterio de Raabe «no funciona». La serie (4.40) puede servir de otro ejemplo, en cuyo caso el criterio de Raabe «no funciona».

6. **Ausencia de una serie universal de comparación.** Ya hemos señalado que los criterios de d'Alembert y de Cauchy se basan en la comparación de la serie considerada con la de la progresión geométrica, en tanto que el criterio de Raabe, con una serie (4.41) que converge (o diverge) más despacio.

Lógicamente, surge la pregunta: *¿existe una serie universal que converge (o diverge) (con la lentitud límite) y la comparación con la cual permitiría establecer la convergencia (o divergencia) de cualquier serie con términos positivos tomada de antemano?*

Demostremos que tal serie universal *no existe*. Sean dadas dos series convergentes $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$; por los símbolos r_n y r'_n denotemos, respectivamente, sus n-ésimos restos. Diremos *que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *converge más despacio que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *si* $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r'_n} = 0$. Demostremos *que para toda serie convergente existe una serie que converge más despacio que ésta*. En efecto, sea $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ cualquier serie convergente; sea r_n su n-ésimo resto. Demostremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$, donde *) $p'_k = \sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}$, converge más despacio que la serie

*) Por r_0 tomamos toda la suma $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$. En realidad, si r'_n es el n-ésimo resto de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\sqrt{r_n}} = 0.$$

Demostremos ahora la ausencia de la serie convergente universal, la comparación con la cual permitiría deducir la convergencia de cualquier serie convergente tomada de antemano. En efecto, si existiera esta serie convergente universal $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, al tomar para ella la serie anteriormente construida $\sum_{k=1}^{\infty} p'k$, obtendríamos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k-1} - r_k}{\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}} = \lim_{k\to\infty} (\sqrt{r_{k-1}} + \sqrt{r_k}) = 0$$

De este modo, *de la comparación con la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *no permite deducir que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} p'k$ es convergente. De manera análoga se demuestra la ausencia de la serie divergente universal, la comparación con la cual permitiría deducir que cualquier serie divergente tomada de antemano es divergente.

§ 3. Series absoluta y condicionalmente convergentes

1. Conceptos de series absoluta y condicionalmente convergentes. Pasemos a examinar series cuyos términos son números reales de cualquier signo.

Definición 1. *La serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{4.49}$$

se denominará absolutamente convergente si converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \tag{4.50}$$

Señalemos que en esta definición nada se dice de si se supone o no la convergencia de la propia serie (4.49). Esta suposición sería excesiva puesto que es válido el teorema siguiente.

Teorema 4.9. *De la convergencia de la serie* (4.50) *se desprende la convergencia de la serie* (4.49).

DEMOSTRACIÓN. Empleemos el criterio de Cauchy para la serie (es decir, el teorema 4.1). Es necesario demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para todos los números n que sa-

fistacen la condición $n \geqslant N$ y para cualquier p natural,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon. \qquad (4.51)$$

Fijemos cualquier $\varepsilon > 0$. Dado que la serie (4.50) converge, en virtud del teorema 4.1, existe un número N tal que para todos los números n que satisfacen la condición $n \geqslant N$ y para cualquier p natural

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon. \qquad (4.52)$$

Teniendo en cuenta que el módulo de la suma de varios sumandos no supera a la suma de sus módulos, podemos escribir

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|. \qquad (4.53)$$

Comparando las desigualdades (4.52) y (4.53), obtenemos la desigualdad (4.51). El teorema queda demostrado.

Definición 2. *La serie (4.49) se denomina condicionalmente convergente si converge, mientras que la serie correspondiente de los módulos (4.50) diverge.*

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots, \text{ donde } \alpha > 1,$$

puede servir de ejemplo de serie *absolutamente* convergente, puesto que, si $\alpha > 1$, la serie (4.33) converge. Demos un ejemplo de serie *condicionalmente* convergente. Demostremos la convergencia condicional de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \qquad (4.54)$$

Como la serie correspondiente de los módulos (serie armónica), según ya sabemos, *diverge*, para demostrar la convergencia condicional de la serie (4.54), basta demostrar que esta serie converge. Demostremos que la serie (4.54) converge al número ln 2. En el p. 2 del § 15, cap. 1 hemos desarrollado la función ln $(1 + x)$ por la fórmula de Maclaurin

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x). \qquad (4.55)$$

En el mismo punto, para todos los x del segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ está obtenida la siguiente estimación del término residual:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}.$$

Adoptando en las fórmulas (4.55) y (4.56) $x = 1$, tendremos

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1)$$

donde

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1}$$

o bien

$$\left|\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right] - \ln 2\right| < \frac{1}{n+1}.$$

Designando por S_n la n-ésima suma parcial de la serie (4.54), podemos escribir la última desigualdad en la forma

$$|S_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1}.$$

De este modo, la diferencia $S_n - \ln 2$ es una sucesión infinitesimal, lo que demuestra la convergencia de la serie (4.54) al número ln 2.

2. Sobre la reordenación de los términos de una serie condicionalmente convergente. Una de las propiedades más importantes de la suma de un número finito de sumandos reales es la *propiedad conmutativa*. Esta última afirma que la suma no cambia al conmutar los sumandos. Lógicamente, surge la pregunta: ¿sigue siendo o no válida esta propiedad para la suma de una serie convergente, es decir, *puede o no cambiar la suma de una serie convergente al reordenar los términos de esta serie?* En el presente punto aclararemos esta cuestión respecto a una *serie condicionalmente convergente*. Empecemos la consideración examinando una reordenación concreta de los términos de la serie (4.54). Para mayor comodidad, escribamos la serie (4.54) en la forma

$$1 - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \ldots \qquad (4.56)$$

Al finalizar el punto anterior hemos demostrado que la serie (4.54) converge condicionalmente y tiene la suma $S = \ln 2$. Reordenemos ahora los términos de la serie (4.54) de modo que después de un término positivo estén dos negativos. Como resultado de esta reordenación de términos obtenemos la serie

$$1 - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \ldots \qquad (4.57)$$

Demostremos que la serie (4.57), obtenida como resultado de dicha reordenación de los términos de la serie (4.54), converge y tiene una suma dos veces inferior a la de la serie (4.54). Denotaremos las m-ésimas sumas parciales de las series (4.54) y (4.57) por los símbolos S_m y S'_m, respectivamente. Podemos escribir:

$$S'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

Así, pues,

$$S'_{3m}=\frac{1}{2}S_{2m}. \tag{4.58}$$

Luego, es obvio que

$$S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m}, \tag{4.59}$$

$$S'_{3m-2}=S'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}. \tag{4.60}$$

Puesto que $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S$, pasando al límite, para $m\to\infty$ de las fórmulas (4.58), (4.59) y (4.60) obtenemos

$$\lim_{m\to\infty} S'_{3m}=\frac{1}{2}S,\quad \lim_{m\to\infty} S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S,\quad \lim_{m\to\infty} S'_{3m-2}=\frac{1}{2}S.$$

Por lo tanto, queda definitivamente demostrado que la serie (4.57) converge y tiene una suma igual a $\frac{1}{2}S$. Como $S=\ln 2\neq 0$, es evidente que $\frac{1}{2}S\neq S$. Por tanto, *como resultado de la reordenación anteriormente mencionada de los términos cambió la suma de la serie condicionalmente convergente* (4.54). El ejemplo concreto considerado más arriba muestra que la serie condicionalmente convergente *no posee la propiedad conmutativa.* La siguiente afirmación notable, formulada por Riemann, aclara completamente la cuestión sobre la influencia de las reordenaciones de los términos en la suma de una serie condicionalmente convergente.

Teorema 4.10 (teorema de Riemann). *Si una serie converge condicionalmente, cualquiera que sea el número L tomado de antemano, se puede reordenar los términos de la serie de modo que la serie transformada convergirá al número L.*

DEMOSTRACION. Sea

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{4.61}$$

serie arbitraria condicionalmente convergente. Mediante $p_1, p_2, p_3, \ldots$ denotaremos *los términos positivos* de la serie (4.61), escritos en el mismo orden en que se encuentran en esta serie, y mediante $q_1, q_2, q_3, \ldots$, *los módulos de los términos negativos de la serie* (4.61), escritos en el mismo orden en que se encuentran en esta serie. La serie (4.61) comprende *un número infinito de términos tanto positivos como negativos*, puesto que si se tuviera un número finito de términos de un signo, eliminando un número finito de primeros términos que no influyen en la convergencia, obtendríamos una serie compuesta de términos de un signo, para la cual la convergencia significaría la convergencia *absoluta*. Así, pues, con la serie (4.61) están ligadas dos series infinitas con términos *positivos* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$. La primera de estas series se denotará por el símbolo P y la segunda por Q. Demostremos que ambas series P y Q son divergentes. Por el símbolo S_n denotaremos la n-ésima suma parcial de la serie (4.61), por P_n, la suma de todos los términos positivos que integran S_n, por Q_n, la suma de los módulos de todos los términos negativos que integran S_n. Entonces, es obvio que $S_n = P_n - Q_n$, y como, según la condición, la serie (4.61) converge a un número S, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} (P_n - Q_n) = S. \qquad (4.62)$$

Por otra parte, ya que la serie (4.61) *no converge absolutamente*,

$$\lim_{n\to\infty} (P_n + Q_n) = \infty. \qquad (4.63)$$

Comparando (4.62) y (4.63), obtenemos $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$, es decir, queda demostrado que ambas series P y Q divergen. De la divergencia de las series P y Q se desprende que aun después de eliminar cualquier número finito de los primeros términos de estas series, entre los términos restantes, tanto de la serie P como de la serie Q, podemos tomar un número tan grande de términos que su suma superará a cualquier número tomado de antemano. Basándonos en este hecho, demostremos que se puede reordenar los términos de la serie inicial (4.61) de modo que, como resultado, se obtiene una serie convergente al número L tomado de antemano. En efecto, obtenemos la serie necesaria del modo siguiente. En primer lugar, de la serie inicial (4.61) elejimos *exactamente tantos* términos positivos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{k_1}$ que su suma $p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1}$ supere a L. A continuación, añadamos a los términos elegidos *exactamente tantos* términos negativos $-q_1, -q_2, \ldots, -q_{k_2}$ que la suma común $p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k_2}$ sea menor que L. Además, volvamos a añadir *exactamente tantos* términos positivos $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, p_{k_3}$ que la suma total $p_1 + p_2 + \ldots p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k_2} + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_3}$ sea mayor que L. Por

razonamientos análogos obtenemos una serie infinita que comprende *todos los términos* de la serie inicial (4.61), puesto que tendremos que añadir cada vez *por lo menos un término* positivo o negativo de la serie inicial. Queda por demostrar que la serie obtenida converge a L. Observemos que en la serie obtenida se alteran sucesivamente *grupos de términos positivos* y *grupos de términos negativos*. Si la suma parcial de la serie obtenida termina en *un grupo completamente acabado*, la diferencia de esta suma parcial respecto del número L no supera al módulo de su último término*). Si la suma parcial termina en *un grupo no completamente acabado*, la diferencia de esta suma parcial respecto del número L no supera al módulo del último término del penúltimo de los grupos. Para establecer que la serie converge hacia L, basta cerciorarse de que los módulos de los últimos términos de los grupos forman una sucesión infinitesimal, lo que se desprende directamente de la condición necesaria de convergencia de la serie inicial (4.61). El teorema de Riemann queda demostrado.

3. Sobre la reordenación de los términos de una serie absolutamente convergente. En el punto anterior hemos demostrado que *una serie condicionalmente convergente no posee la propiedad conmutativa*. En este punto demostraremos que *para toda serie absolutamente convergente es válida la propiedad conmutativa*.

***Teorema 4.11** (teorema de Cauchy). Si una serie converge absolutamente, toda serie obtenida a partir de la dada reordenando los términos también converge absolutamente y tiene la misma suma que la serie dada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{4.64}$$

converge absolutamente y la suma de esta serie es igual a S. Sea, además,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \tag{4.65}$$

una serie obtenida de la serie (4.64) reordenando los términos. Es necesario demostrar: 1) que la serie (4.65) converge y tiene una suma igual a S, 2) que la serie (4.65) converge absolutamente. Demostremos primero la afirmación 1). Es suficiente demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para $n \geqslant N$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - S \right| < \varepsilon. \tag{4.66}$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dado que la serie (4.64) converge absolutamente y tiene una suma igual a S, entonces, para $\varepsilon > 0$ elegido,

*) Puesto que añadimos términos al grupo dado exactamente hasta que la suma total supera al número L.

se puede indicar un número N_0 tal que serán válidas las desigualdades

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (}p\text{ es cualquier número natural)} \qquad (4.67)$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}\text{*)}. \qquad (4.68)$$

Escojamos ahora el número N tan grande que cualquier suma parcial S'_n de la serie (4.65) con un número n mayor que N *comprenda todos los primeros N_0 términos de la serie* (4.65)**).

Estimemos la diferencia que está en el miembro izquierdo de (4.66) y demostremos que, si $n \geqslant N$, para esta diferencia es válida la desigualdad (4.66).

En efecto, dicha diferencia puede representarse en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} u'_k - S = \left(\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right). \qquad (4.69)$$

Puesto que módulo de la suma de dos magnitudes no supera a la suma de sus módulos, a partir de (4.69) obtenemos

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - S\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right|. \qquad (4.70)$$

De las desigualdades (4.68) y (4.70) es evidente que para demostrar la desigualdad (4.66) basta demostrar que para $n \geqslant N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.71)$$

Para demostrar la desigualdad (4.71), advirtamos que para $n \geqslant N$ en la primera de las sumas del primer miembro de (4.71) *comprende todos los N_0 primeros términos de la serie* (4.64). Por consiguiente, la diferencia

$$\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \qquad (4.72)$$

es suma de $(n - N_0)$ términos de la serie (4.64), *cada uno de cuyos números supera a N_0*.

Si escogemos un p natural tan grande que el número $N_0 + p$ *supere a los números de todos los $(n - N_0)$ términos de la suma que*

*) En las desigualdades (4.67) y (4.68) se puede tomar *un mismo número N_0*. En efecto, escribiendo con anticipación las dos desigualdades mencionadas con distintos números N_0, podemos tomar el máximo entre los números N_0.

**) Se puede escoger este número N, puesto que la serie (4.65) se obtiene de la (4.64) reordenando los términos.

acabamos de indicar, para la diferencia (4.72) será válida, en todo caso, la desigualdad

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0}\right| \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{N_0+p} |u_k|. \tag{4.73}$$

De las desigualdades (4.73) y (4.67) se desprende la desigualdad (4.71). Por lo tanto, queda demostrada la desigualdad (4.66), o sea, queda demostrado que la serie (4.65) converge y tiene una suma igual a S. Queda por demostrar la afirmación 2) de que la serie (4.65) converge *absolutamente*. La demostración de esta afirmación se infiere de la afirmación 1) si la aplicamos a las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u'_k|. \tag{4.74}$$

Además, se demuestra la convergencia de la segunda de la serie (4.74), es decir, la convergencia absoluta de la serie (4.86). El teorema 4.11 queda completamente demostrado.

§ 4. Operaciones aritméticas con las series convergentes

En el presente párrafo consideraremos la cuestión sobre la posibilidad de sumar y multiplicar término a término las series convergentes.

Teorema 4.12. *Si dos series $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ convergen y tienen sumas iguales a U y V, respectivamente, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ también converge y tiene una suma igual a $U \pm V$.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos n-ésimas sumas parciales de las series $\sum u_k$, $\sum v_k$ y $\sum (u_k \pm v_k)$ por U_n, V_n y S_n, respectivamente. Entonces, es obvio que $S_n = U_n \pm V_n$. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U$, $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$, según los teoremas 3.9 y 3.10 del t. 1, existe un límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = U \pm V$. El teorema queda demostrado.

De este modo, se puede sumar y sustraer término a término cualesquiera series convergentes.

Pasando a la cuestión sobre la posibilidad de multiplicar las series término a término, demostremos la siguiente afirmación.

Teorema 4.13. *Si dos series $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ y $\sum_{l=1}^{\infty} v_l$ convergen absolutamente y tienen las sumas iguales a U y V, respectivamente, la serie compuesta de todos los productos de la forma*

$$u_k v_l \ (k = 1, 2, \ldots; \ l = 1, 2, \ldots),$$

enumerados en cualquier orden, también converge absolutamente y su suma es igual a UV.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $w_1, w_2, w_3, \ldots$ los productos de la forma $u_k v_l$ ($k = 1, 2, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots$), enumerados en cualquier orden. Demostremos que la serie $\sum_{l=1}^{\infty} |w_l|$ converge. Sea S_n la n-ésima suma parcial de esta serie. La suma S_n se compone de términos de la forma $|u_k v_l|$. Entre los índices k y l de estos términos que integran la suma S_n, existe un índice *máximo* que se denotará por m.

Entonces, en todo caso,

$$S_n \leqslant (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m|)(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_m|). \quad (4.75)$$

En el segundo miembro de la desigualdad (4.75) se halla el producto de m-ésimas sumas parciales de las series $\sum |u_k|$ y $\sum |v_l|$. Dada la convergencia de dichas series con términos positivos, todas sus sumas parciales (y, por tanto, su producto) están *acotadas*. Por eso, *lo está* también la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}$, lo que demuestra la convergencia de la serie $\sum |w_l|$, es decir, la convergencia *absoluta* de la serie $\sum w_l$.

Queda por demostrar que la última serie tiene una suma S igual a UV. Como esta serie converge absolutamente, en virtud del teorema 4.11, su suma S *no depende del orden en que la sumamos*. Cualquiera que sea la sucesión (y, por tanto, la *subsucesión**)) de las sumas parciales de esta serie, ella converge al número S. Pero, en este caso, la suma S de la serie $\sum_{l=1}^{\infty} w_l$ es, sin duda, igual a UV, puesto que precisamente a este número converge la *subsucesión* W_m de las sumas parciales de esta serie, de la forma

$$W_m = (u_1 + u_2 + \ldots + u_m)(v_1 + v_2 + \ldots + v_m).$$

El teorema 4.13 queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Para numerosos fines es conveniente escribir el producto de las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

en la forma

*) En virtud del p. 1 del § 4, cap. 3, t. 1.

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k\right)=$$
$$= u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \ldots + (u_1v_{k-1} + \ldots + u_{k-1}v_1) + \ldots$$

Sin demostrar, señalemos que la serie obtenida multiplicando dos series término a término mediante dicho modo especial, converge también si *sólo una* serie de las dos series a multiplicar converge *absolutamente*. Si ambas series convergen condicionalmente, multiplicándolas término a término incluso según esta regla, como regla, se obtiene una serie divergente.

§ 5. Criterios de convergencia de las series arbitrarias

En el § 2 hemos establecido algunos criterios de convergencia de las series con *términos positivos*. En el presente párrafo examinaremos los criterios de convergencia de las series con términos de cualquier signo. Así, pues, sea

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{4.76}$$

una serie, cuyos términos tienen signos cualesquiera que sean. Ante todo, observamos que para establecer la convergeocia *absoluta* de esta serie, es decir, para establecer la convergencia de la serie con términos positivos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|,$$

se puede aplicar cualquiera de los criterios del § 2 (criterios de d'Alembert, de Cauchy, de Raabe o criterio integral). Sin embargo, ninguno de dichos criterios da la posibilidad de aclarar *la cuestión más sutil sobre la convergencia condicional de la serie* (4.76 *).

---

*) Además, observemos que los criterios de d'Alembert y de Cauchy pueden aplicarse *para establecer la divergencia de una serie con términos de cualquier signo* (4.76). En efecto, cada vez que el criterio de d'Alembert o de Cauchy hace constar la divergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$, el k-ésimo término de la serie (4.76) u_k no tiende a cero cuando $k\to\infty$, o sea, la serie (4.76) diverge. A título de ejemplo establezcamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k!\left(\frac{x}{k}\right)^k$ diverge para cualquier valor fijo de x que satisface la desigualdad $|x| > e$. Subrayemos que es difícil comprobar directamente que el k-ésimo término de la serie considerada no tiende a cero cuando $k\to\infty$. Apliquemos el criterio de d'Alembert a la serie considerada. Denotando el k-ésimo término de esta serie por a_k tendremos $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^k}$, de donde $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|}{e} > 1$. La divergencia de la serie queda demostrada.

A continuación nos pondremos a buscar criterios más finos que permitan establecer la convergencia de la serie (4.76) también cuando esta serie no es absolutamente convergente.

1. Criterio de Leibniz. El criterio de Leibniz se refiere a un tipo particular muy difundido de la serie (4.76), a la llamada serie *alternada*. Una serie se denomina *alternada* si los términos de esta serie tienen alternativamente ora signo positivo ora negativo. Es conveniente escribir la serie alternada de modo que sean definidos los signos de todos sus términos, es decir, en la forma

$$p_1 - p_2 + p_3 - \ldots + (-1)^{k-1} p_k + \ldots \qquad (4.77)$$

donde todos los $p_k \geqslant 0$.

Teorema 4.14 **(*criterio de Leibniz*).** *Si los términos de una serie alternada, tomados por módulo, forman una sucesión infinitesimal no creciente, esta serie converge.*

OBSERVACIÓN 1. Una serie que satisface las condiciones del teorema 4.14 se denomina frecuentemente *serie de Leibniz*.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.14. Supongamos que viene dada la serie (4.77) y se conoce que la sucesión $\{p_k\}$ es no creciente e infinitesimal. La suma parcial de orden *par* de esta serie S_{2n} puede escribirse en la forma

$$S_{2n} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \ldots + (p_{2n-1} - p_{2n}). \qquad (4.78)$$

Dado que en (4.78) toda expresión entre paréntesis es *no negativa**), está claro que si n crece, la sucesión $\{S_{2n}\}$ *no decrece*.

Por otra parte, S_{2n} puede escribirse en la forma

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \ldots$$
$$\ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n},$$

de donde es evidente que para cualquier número n habrá $S_{2n} \leqslant p_1$. Así, pues, la sucesión de las sumas parciales *pares* S_{2n} no decrece y está superiormente acotada. En virtud del teorema 3.15 del tomo 1, esta sucesión converge a un número S, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. De la igualdad evidente $S_{2n-1} = S_{2n} + p_{2n}$ y de los que $\lim\limits_{n\to\infty} p_{2n} = 0$ se desprende que la sucesión de las sumas parciales *impares* $\{S_{2n-1}\}$ también converge al mismo número S, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$. Así, pues, toda la sucesión $\{S_n\}$ converge a S.

OBSERVACIÓN 2. Demostrando el teorema 4.14, descubrimos que la sucesión de las sumas parciales *pares* $\{S_{2n}\}$ converge al límite S *sin decrecer*. De un modo análogo, de la igualdad

*) Debido a que $\{p_k\}$ no crece, es decir, $p_k \geqslant p_{k+1}$.

$$S_{2n-1} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \dots \\ \dots - (p_{2n-2} - p_{2n-1})$$

se infiere que la sucesión de las sumas parciales impares $\{S_{2n-1}\}$ converge al límite S *sin decrecer*.

De esta manera, para cualquier número n

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}. \qquad (4.79)$$

Puesto que $S_{2n-1} - S_{2n} = p_{2n}$, de las desigualdades (4.79) se desprende que $S - S_{2n} \leqslant p_{2n}$ y $S_{2n-1} - S \leqslant p_{2n} \leqslant p_{2n-1}$. Por lo tanto, obtenemos que para cualquier número n es válida la desigualdad

$$| S_n - S | \leqslant p_n. \qquad (4.80)$$

La desigualdad (4.80) se usa ampliamente al realizar los cálculos aproximados con ayuda de las series.

En calidad de ejemplo, consideremos la serie que anteriormente hemos usado más de una vez

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \dots \qquad (4.81)$$

Observemos que la serie (4.81) es la serie de Leibniz, y, por tanto, su convergencia se desprende del teorema 4.14. Por ejemplo, sea que es necesario calcular la suma de la serie (4.81), es decir, el número ln 2, con una exactitud de hasta $\frac{1}{10^n}$. Conforme a la estimación (4.80), esta suma coincide, con la exactitud necesaria, con $S_{10^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{10^n}$.

2 **Criterio de Dirichlet — Abel.** Para establecer otro criterio fino de convergencia de las series, deduciremos una identidad interesante, análoga a la fórmula de integración por partes. Sean $u_1, u_2, u_3, \dots, v_1, v_2, v_3, \dots$ números completamente arbitrarios, $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, n y p, números cualesquiera. Entonces es válida la siguiente identidad:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n. \qquad (4.82)$$

La identidad (4.82) suele llamarse *identidad de Abel**).

*) Si la igualdad (4.82) se escribe en la forma

$$\sum_{k=n}^{n+p} v_k (S_k - S_{k-1}) = S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_{k+1} - v_k),$$

Deducción de la identidad de Abel. Consideremos que $u_k = S_k - S_{k-1}$ y pongamos este valor de u_k en el segundo miembro de (4.82). Obtenemos

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k.$$

En la última suma disminuyamos el índice de sumación k en la unidad. Obtenemos

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_k + S_{n+p} v_{n+p} - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} - S_{n-1} v_n =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n.$$

Hemos obtenido una expresión que coincide con el segundo miembro de (4.82). Por lo tanto, la identidad de Abel queda demostrada.

Teorema 4.15 (criterio de Dirichlet — Abel). *Sea dada la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k. \tag{4.83}$$

La serie converge si se cumplen dos condiciones siguientes:

1) *la sucesión $\{v_k\}$ es no creciente e infinitesimal;*

2) *la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ tiene una sucesión acotada de las sumas parciales.*

DEMOSTRACIÓN. Mediante S_n denotemos la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Según la condición, existe un número $M > 0$ tal que $|S_n| \leqslant M$ para todos los números n. En virtud del criterio de Cauchy, es suficiente demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para $n \geqslant N$ y para cualquier p natural

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \right| < \varepsilon. \tag{4.84}$$

Sea dado cualquier $\varepsilon > 0$. Dado que la sucesión $\{v_k\}$ es infinitesimal y no crece, para el número positivo $\frac{\varepsilon}{2M}$ existe un número N tal que

$$0 \leqslant v_n < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (\text{para } n \geqslant N). \tag{4.85}$$

---

se hace evidente que la transformación de Abel es, en realidad, una fórmula de sumación por partes, siendo una fórmula de diferencias, análoga a la de integración por partes

Ahora, para estimar la magnitud del segundo miembro de (4.84), apliquemos la identidad de Abel (4.82). Teniendo en cuenta que el módulo de la suma de varias magnitudes no supera a la suma de sus módulos, el módulo del producto es igual al producto de los módulos y que $v_k \geqslant v_{k+1}$, obtenemos

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |S_k| (v_k - v_{k+1}) + |S_{n+p}| v_{n+p} + |S_{n-1}| v_n. \quad (4.86)$$

En el segundo miembro de (4.86) empleemos la desigualdad $|S_n| \leqslant M$, válida *para todos* los números n. Obtenemos

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant M \left\{\sum_{k=n}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) + v_{n+p}\right\} + M v_n. \quad (4.87)$$

Además, observemos que la suma entre llaves es exactamente igual a v_n. En este caso, la desigualdad (4.87) toma la forma

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| \leqslant 2M v_n. \quad (4.88)$$

Ahora, si en el segundo miembro de (4.88) empleamos la desigualdad (4.85), obtenemos que para $n \geqslant N$ y para cualquier p natural es válida la desigualdad (4.84). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. El teorema 4.14 (criterio de Leibniz) es un caso particular del teorema 4.15 cuando*) $u_k = (-1)^{k-1}$.

EJEMPLOS 1. Investigar la serie siguiente en cuanto a la convergencia:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \ldots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} + \ldots$$

Dicha serie puede considerarse como una serie de la forma (4.83) para

$$v_k = \frac{1}{k}, \; u_1 = 1, \; u_2 = 1, \; u_3 = -2, \; u_4 = 1, \; u_5 = 1, \; u_6 = -2, \; \ldots$$

Es obvio que: 1) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ posee una sucesión *acotada* de las sumas parciales: $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 0$, $S_4 = 1$, $S_5 = 0$, $S_6 = 0$, ...; 2) la sucesión $\{v_k\}$ no crece y es infinitesimal. Según el teorema 4.15, la serie considerada converge.

2. Aclaremos la cuestión sobre la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$, donde x es un número real fijo. Empleando las desig-

*) Es obvio que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ tiene una sucesión acotada de las sumas parciales.

naciones del teorema 4.15, hagamos $u_k = \cos kx$, $v_k = 1/k$. Estimemos la sucesión de las sumas parciales S_n de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Como para cualquier número k

$$\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx,$$

sumando esta relación respecto de k de 1 a n, obtenemos

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{sen}\frac{1}{2}x=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=2S_n\operatorname{sen}\frac{x}{2}.$$

De aquí,

$$S_n=\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Así, pues, para cualquier x *no múltiplo* de 2π la sucesión de las sumas parciales S_n está acotada:

$$|S_n|\leqslant\frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|}.$$

Según el teorema 4.15, la serie considerada *converge para cualquier valor x no múltiplo de 2π*. Si *x es múltiplo de 2π*, la serie considerada se transforma en armónica y, según hemos demostrado anteriormente, *diverge*.

§ 6. Productos infinitos

1. Conceptos fundamentales. Al concepto de *producto numérico infinito* es muy similar el concepto de serie numérica. Sea dada una sucesión numérica infinita $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ La expresión escrita formalmente en la forma

$$v_1v_2v_3\ldots v_k\ldots=\prod_{k=1}^{\infty}v_k \qquad (4.89)$$

suele denominarse *producto infinito*. Los elementos v_k suelen llamarse términos del producto infinito dado. El producto de los primeros n términos del producto infinito dado suele denominarse n-ésimo producto parcial y denotarse por el símbolo P_n:

$$P_n=v_1v_2\ldots v_n=\prod_{k=1}^{n}v_k.$$

El producto infinito (4.89) se denomina *convergente* si la sucesión de los productos parciales P_n tiene un límite finito P, *distinto de cero**). Si el producto infinito (4.89) converge, dicho límite P se denomina *valor de este producto infinito*, es decir, se escribe

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{4.90}$$

Subrayemos que la igualdad (4.90) tiene sentido solamente para un producto infinito. Está claro que la consideración de los productos infinitos es, en esencia, una nueva forma de estudiar las sucesiones numéricas, puesto que a todo poducto infinito dado le corresponde unívocamente la sucesión de sus productos parciales, y a toda sucesión numérica $\{P_k\}$, cuyos elementos se diferencian de cero, le corresponde unívocamente un producto infinito, para el cual esta sucesión es una sucesión de productos parciales (basta tomar los términos del producto infinito iguales a $v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$ para $k > 1$ y $v_1 = P_1$).

Teorema 4.16. *Una condición necesaria de convergencia del producto infinito* (4.89) *es que su k-ésimo término tienda a la unidad cuando $k \to \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea que el producto infinito (4.89) converge y tiene un valor P diferente de cero. Entonces, $\lim\limits_{k\to\infty} P_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} P_k = p \neq 0$. Dado que $v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} v_k$ existe y es igual a la unidad.

Observemos que la eliminación de *cualquier número finito* de términos de un producto infinito (naturalmente, si entre estos términos no hay términos que sean iguales a cero) *no influye* en la convergencia de este producto. Dado que, según la definición anteriormente adoptada, un producto infinito que tiene, por lo menos, *un término* igual a cero se considera *divergente*, en adelante *no examinaremos en general los productos infinitos que tienen por lo menos un término igual a cero.*

EJEMPLOS DE PRODUCTOS INFINITOS.

1 $$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^k}\ldots \tag{4.91}$$

(x es cualquier número fijo).

---

*) El hecho de que para $P = 0$ el producto infinito suele considerarse *divergente* y, pese a tener carácter convencional, permite, como lo veremos en adelante, verificar una analogía precisa entre la convergencia de las series y de los productos infinitos.

Demostremos que el producto infinito (4.91) converge y tiene el valor $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Calculemos el n-ésimo producto parcial

$$P_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}. \qquad (4.92)$$

Multiplicando los dos miembros de (4.92) por sen $\frac{x}{2^n}$ y empleando sucesivamente la fórmula del seno del ángulo doble $\operatorname{sen} 2y = 2\operatorname{sen} y \cos y$, obtenemos

$$P_n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{sen} x.$$

De la última fórmula *),

$$P_n = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\left\{\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}\right\}.$$

Debido a que la expresión entre llaves tiende a la unidad para $n \to \infty$ (en virtud del primer límite notable), $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ existe y es igual a $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$. Por lo tanto, queda demostrado que el producto infinito (4.91) converge y tiene el valor $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

2. $$\prod_{k=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{k(k+1)}\right] = \prod_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\ldots\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+2)}{(k+1)}\ldots \qquad (4.93)$$

Demostremos que el producto infinito (4.93) converge y tiene el valor $\frac{1}{3}$. Calculemos el producto parcial P_n:

$$P_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\ldots\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}.$$

Después de esto es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}$ existe y es igual a $\frac{1}{3}$.

2. Relación entre la convergencia de los productos infinitos y la de las series. Si el producto infinito (4.89) converge, en virtud del teorema 4.16, todos sus términos v_k son positivos**) a partir de un

*) Tomamos $x \neq 0$. Si $x = 0$, todos los términos de (4.91) y su valor son iguales a la unidad.

**) Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} v_k = 1$.

número k. Como un número finito de los primeros términos no influye de ningún modo en la convergencia del producto infinito, entonces, si examinamos la cuestión sobre la convergencia de los productos infinitos, sin limitar la generalidad, podemos considerar solamente los productos infinitos, cuyos *términos son todos positivos*.

Teorema 4.17. *Para que el producto infinito* (4.89) *con términos positivos converja, es necesario y suficiente que converja la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k. \tag{4.94}$$

En caso de convergencia, la suma S de la serie (4.94) *y el valor P del producto* (4.89) *están relacionados por la fórmula*

$$P = e^S. \tag{4.95}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotando con P_n el n-ésimo producto parcial del producto infinito (4.89) y con S_n, la n-ésima suma parcial de la serie (4.94), podemos escribir

$$S_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}.$$

Dadas la continuidad de la función exponencial para todos los valores del argumento y la continuidad de la función logarítmica para todos los valores positivos del argumento, la sucesión P_n converge si, y sólo si, converge S_n; además, si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^S$. El teorema queda demostrado.

Si investigamos un producto infinito en cuanto a la convergencia es muy conveniente representar este producto infinito en la forma

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k) = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)\ldots \tag{4.96}$$

Claro que, además, conforme a la suposición anteriormente adoptada, consideramos que todos los $u_k > -1$.

El teorema 4.17 afirma que la cuestión sobre la convergencia del producto (4.96) es equivalente a la cuestión de la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k). \tag{4.97}$$

Ahora podemos demostrar otra afirmación.

Teorema 4.18. *Si todos los u_k (por lo menos, a partir de cierto número k) mantienen un mismo signo, para la convergencia del producto infinito* (4.96), *es necesario y suficiente que converja la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{4.98}$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la condición $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ es necesaria también para la convergencia de la serie (4.98) y para la convergencia del producto (4.96), podemos considerar cumplida esta condición al demostrar tanto la necesidad, como la suficiencia. Pero de dicha condición y de la fórmula asintótica*)

$$\ln(1+y) = y + o(y)$$

se desprende que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = 1 \tag{4.99}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{\ln(1+u_k)} = 1. \tag{4.100}$$

Puesto que, según la condición del teorema, todos los términos de las series (4.97) y (4.98) mantienen un mismo signo a partir de cierto número k, en virtud del corolario del teorema de comparación 4.3, las condiciones (4.99) y (4.100) permiten afirmar que la serie (4.98) converge si, y sólo si, converge la serie (4.97). El teorema queda demostrado.

EJEMPLOS. 1) De la divergencia de la serie armónica y del teorema 4.18 se desprende la divergencia de los siguientes productos infinitos:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\cdots$$

Es fácil comprender que el primero de los productos indicados diverge hacia $+\infty$ y el segundo, hacia el cero.

2) Del mismo teorema 4.18 y de la convergencia de la serie (4.33) para $\alpha > 1$ se infiere la convergencia de los siguientes productos infinitos para $\alpha > 1$:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^{\alpha}}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{\alpha}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\cdots$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right] = \left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{\alpha}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right)\cdots$$

*) Véase el § 7 del cap. 4, t. 1.

Al igual que para las series, para los productos infinitos se introducen los conceptos de convergencia *absoluta* y *condicional*. El producto infinito (4.96) se denomina *absolutamente convergente* si, y sólo si, la serie (4.97) converge absolutamente. Los teoremas de Cauchy 4.11 y de Riemann 4.10 permiten deducir que el producto absolutamente convergente posee la propiedad *conmutativa*, mientras que el producto condicionalmente convergente no la posee a ciencia cierta.

Es válida la afirmación siguiente.

Teorema 4.19. *El producto infinito* (4.96) *converge absolutamente si, y sólo si, converge absolutamente la serie* (4.98). Para demostrar este teorema es suficiente demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ converge si, y sólo si, converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1+u_k)|$. Lo último se desprende fácilmente de la existencia de los límites (4.99) y (4.100). Dejamos los detalles de los razonamientos a cargo del lector.

Para concluir, consideremos varios ejemplos más.

1° Consideremos el producto infinito

$$x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots \qquad (4.101)$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge, en virtud de los teoremas 4.18 y 4.19, el producto infinito (4.101) converge absolutamente para cualquier valor fijo x distinto de $l\pi$ (donde $l=0, \pm 1, \ldots$). En el complemento 2 del presente capítulo demostraremos que este producto converge al valor $\operatorname{sen} x$. Por lo tanto, argumentaremos la descomposición de la función $\operatorname{sen} x$ en un producto infinito

$$\operatorname{sen} x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \qquad (4.102)$$

2° De la descomposición (4.102), empleando la relación $\cos x=\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\operatorname{sen} x}$, se obtiene fácilmente la descomposición siguiente:

$$\cos x=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right]. \qquad (4.103)$$

Para cualquier x diferente de $\frac{\pi}{2}(2l-1)$ ($l=0, \pm 1, \ldots$), la convergencia absoluta del producto del segundo miembro de (4.103)

se desprende de los teoremas 4.18 y 4.19, así como de la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

3°. Adoptando en la descomposición (4.102) $x = \pi/2$, obtenemos

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2-1}{4k^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}.$$

De aquí se obtiene la llamada *fórmula de Wallis**)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \cdots \qquad (4.104)$$

Realizando transformaciones no complicadas, se puede reducir la fórmula de Wallis a la forma

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2k+1} \left[\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right]^2. \qquad (4.104^*)$$

Inicialmente, la fórmula de Wallis se usó para calcular aproximadamente el número π. En el presente, para calcular el número π se utilizan métodos más eficaces. La fórmula de Wallis (4.104) es de interés para algunas investigaciones teóricas**).

Complemento 1

Teorema auxiliar para el p. 3 del § 2

Teorema 4.20. *Sean p_k cualesquiera números positivos. Entonces, si existe el límite*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \qquad (4.105)$$

entonces existe también el límite $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{p_k}$, con tal de que es válida la fórmula

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{p_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L. \qquad (4.106)$$

DEMOSTRACIÓN. Primero demostremos la siguiente afirmación auxiliar***): *si la sucesión de números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ converge a un número L, entonces a este mismo número L converge también la sucesión de las medias proporcionales de estos números $b_k = \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$.* Para demostrar la afirmación auxiliar observemos que, en virtud de la continuidad de la función logarítmica

---

*) John Wallis, matemático inglés (1616—1703).

**) En particular, se puede utilizarla para establecer la llamada fórmula de Stirling (véase el tomo 3 del presente curso). James Stirling, matemático inglés (1692—1770).

***) Subrayemos que esta afirmación es también interesante de por sí.

para $L > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \ln a_k = \ln L$. (La última igualdad es formalmente válida también para $L = 0$ cuando $\ln L = -\infty$.) Pero, entonces, según el teorema del límite del promedio (véase el ejemplo 1, complemento del cap. 3, tomo 1), existe el límite

$$\lim_{k\to\infty} \ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_k}{k} = \ln L.$$

(La última igualdad es también válida para $L = 0$ cuando $\ln L = -\infty$.) De la última igualdad, en virtud de la continuidad de la función exponencial, obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \lim_{k\to\infty} e^{\ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}} = e^{\ln L} = L.$$

(Estos razonamientos son también válidos para $L = 0$.)

La afirmación auxiliar queda demostrada. Aplicando esta afirmación a los números $a_1 = p_1$, $a_2 = \frac{p_2}{p_1}$, $a_3 = \frac{p_3}{p_2}$, $\ldots$, $a_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}$, $\ldots$, demostramos la existencia del límite $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k}$ y la igualdad (4.106). El teorema 4.20 queda demostrado.

Complemento 2

Descomposición de la función sen x en el producto infinito

Para que sea más cómodo, dividimos la deducción de la fórmula (4.102) en puntos separados.

1°. *Sea m cualquier número impar positivo:* $m = 2n + 1$. Primero demostremos que para cualquier valor θ *) diferente de $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) es válida la siguiente fórmula:

$$\frac{\operatorname{sen} m\theta}{m \operatorname{sen}\theta} = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{m}}\right), \quad n = \frac{m-1}{2}. \tag{4.107}$$

Para establecer la fórmula (4.107), empleamos la fórmula de Moivre (véase el § 4, cap. 7, tomo 1)

$$\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^m.$$

Descomponiendo el miembro derecho de esta fórmula con ayuda del binomio de Newton y comparando las partes imaginarias, obtenemos

$$\operatorname{sen} m\theta = m \cos^{m-1}\theta \operatorname{sen}\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cos^{m-3}\theta \operatorname{sen}^3\theta + \ldots$$

Teniendo en cuenta que $m = 2n + 1$, tendremos

$$\frac{\operatorname{sen} m\theta}{m \operatorname{sen}\theta} = \cos^{2n}\theta - \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cos^{2n-2}\theta \operatorname{sen}^2\theta + \ldots \tag{4.108}$$

---

*) A continuación nos interesarán solamente los valores θ del intervalo $0 < |\theta| < \pi$.

En el miembro derecho de (4.108) todos los exponentes de los cosenos y los senos son *pares*, así que, si sustituimos $\cos^2\theta$ por $1-\operatorname{sen}^2\theta$, *en el miembro derecho de* (4.108) *obtenemos el polinomio de grado n respecto a* $\operatorname{sen}^2\theta$. Haciendo $z=\operatorname{sen}^2\theta$ denotemos este polinomio mediante el símbolo $F(z)$ y sus raíces, mediante los símbolos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Dado que $z=\operatorname{sen}^2\theta\to 0$ cuando $\theta\to 0$ y el miembro izquierdo de (4.108) tiende a la unidad para $\theta\to 0$, el polinomio $F(z)$ puede representarse en la forma

$$\frac{\operatorname{sen} m\theta}{m\operatorname{sen}\theta}=F(z)=\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Queda por determinar las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Observando que estas raíces corresponden a los ceros de la función $\operatorname{sen} m\theta$, obtenemos

$$\alpha_1=\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{m},\ \alpha_2=\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{m},\ \ldots,\ \alpha_n=\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{m}.$$

Por lo tanto, la fórmula (4.107) queda establecida.

2°. Poniendo en la fórmula (4.107) $\theta=x/m$ y teniendo en cuenta que $0<|x|<\pi m$, daremos a esta fórmula la siguiente forma

$$\frac{\operatorname{sen} x}{m\operatorname{sen}\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{4.109}$$

Fijemos cualquier valor de x (diferente de cero) y tomemos dos números naturales arbitrarios p y n que satisfacen las desigualdades $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$. Entonces la fórmula (4.109) puede escribirse en la forma

$$\frac{\operatorname{sen} x}{m\operatorname{sen}\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}}\right)R_p(x), \tag{4.110}$$

donde

$$R_p(x)=\prod_{k=p+1}^{n}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}}\right). \tag{4.111}$$

Primero estimemos $R_p(x)$. Dado que $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$, los argumentos de todos los senos de la fórmula (4.111) pertenecen al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Además, es obvio que para todos los k que figuran en esta fórmula $|x|<k\pi/2$ y, por tanto,

$$0<\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2m}}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}}=\frac{1}{4\cos^2\frac{k\pi}{2m}}<\frac{1}{2}.$$

$\left(\text{puesto que } \frac{k\pi}{m} < \frac{\pi}{2}, \text{ o sea, } \frac{k\pi}{2m} < \frac{\pi}{4}, \text{ por tanto } \cos^2\frac{k\pi}{2m} > \frac{1}{2}\right)$. Dado que para cualquier β del intervalo $0<\beta<1/2$ son válidas las desigualdades $1 > 1-\beta > e^{-2\beta}$ *), entonces para todos los números k que superan p se tiene

$$1 > 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}} > e^{-2\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}}} \tag{4.112}$$

Multiplicando término a término las desigualdades (4.112) en las cuales ponemos los valores $k = p+1, p+2, \dots, n$, obtenemos la siguiente estimación de $R_p(x)$:

$$1 > R_p(x) > e^{-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}}} \tag{4.113}$$

Tomando en consideración que el argumento $k\pi/m$ se encuentra en el primer cuadrante y que para cualquier β del primer cuadrante $1 \geq \frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta} \geq \frac{2}{\pi}$ **), obtenemos

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}} < \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2} = \frac{m^2}{4k^2} < \frac{m^2}{4}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right].$$

De este modo,

$$e^{-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}}} >$$

$$> e^{-\frac{m^2}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right]} > e^{-\frac{m^2}{2p}\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}.$$

La última desigualdad permite reforzar la estimación (4.113) del modo siguiente:

$$1 > R_p(x) > e^{-\frac{m^2}{2p}\operatorname{sen}^2\frac{x}{m}}. \tag{4.114}$$

*) La desigualdad derecha de estas desigualdades se deduce elementalmente de la fórmula de Maclaurin: $e^{-2\beta} = 1-2\beta+\frac{(2\beta)^2}{2} - \dots < 1-2\beta+2\beta^2 < 1-\beta$, puesto que $2\beta^2<\beta$.

**) Estas desigualdades se deducen del hecho de que la relación $\frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta}$ decrece de 1 hasta $2/\pi$ si β varía de 0 a $\pi/2$. A su vez, este hecho se desprende de que $\left(\frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta}\right)' = \frac{\cos\beta}{\beta^2}(\beta - \operatorname{tg}\beta) < 0$ en todos los puntos del intervalo $0<\beta<\pi/2$.

3. En la fórmula (4.110) hagamos tender el número m al infinito dejando fijados el valor x y el número p. Dado $\lim\limits_{m\to\infty} m \operatorname{sen} \frac{x}{m} = x$, $\lim\limits_{m\to\infty} m^2 \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m} = k^2\pi^2$, entonces existe el límite del miembro izquierdo de (4.110) igual a $\operatorname{sen} x/x$, y el límite del producto finito

$$\prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}}\right) \text{ igual a } \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Luego consideremos que el último límite es diferente de cero, puesto que, si es igual a cero, $\operatorname{sen} x = 0$ y la descomposición (4.102) queda demostrada. Pero, entonces, existe también el límite $\lim\limits_{m\to\infty} R_p(x)$. Lo denotemos mediante $\hat{R}_p(x)$. De las desigualdades (4.114) válidas para cualquier número m y del teorema 3.13 del tomo 1 se desprende que

$$1 \geqslant \hat{R}_p(x) \geqslant e^{-x^2/(\pi^2 p)} \tag{4.115}$$

Pasando al límite para $m\to\infty$, de la fórmula (4.110) tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \hat{R}_p(x). \tag{4.116}$$

4. Por último, manteniendo x fijado, en la fórmula hagamos tender el número p al infinito. Dado que el miembro izquierdo de (4.116) no depende de p y, en virtud de las desigualdades (4.115) y el teorema 3.14 del tomo 1, el límite $\lim\limits_{p\to\infty} \hat{R}_p(x)$ existe y es igual a la unidad, entonces existe también el límite

$$\lim_{p\to\infty} \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Por lo tanto, la descomposición de $\operatorname{sen} x$ (4.102) queda establecida.

OBSERVACIÓN. De manera completamente análoga a las descomposiciones de $\operatorname{sen} x$ (4.102) y de $\cos x$ (4.103) pueden obtenerse *las descomposiciones en productos infinitos de las funciones hiperbólicas*

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{ch} x = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right].$$

Observemos que de las descomposiciones de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$ se obtienen directamente las descomposiciones en productos infinitos de las funciones $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{th} x$ y $\operatorname{cth} x$.

Complemento 3

Métodos generalizados de la sumación de series divergentes

En todo el capítulo 4 llamábamos suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots \tag{4.117}$$

el límite S de la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales de esta serie (a condición de que este límite exista).

En algunos problemas del análisis matemático que son de interés tanto teórico como práctico, debemos operar con series para las cuales la sucesión de las sumas parciales no converge y *la suma en el sentido mencionado en el cap. 4 no existe*. Lógicamente, surge el problema de *la generalización del concepto de suma de la serie y la sumación* de la serie divergente en sentido común (4.117) *empleando algunos métodos generalizados*. En el presente complemento nos detengamos en algunos métodos generalizados de la sumación de series divergentes.

Primero vamos a dar la característica general de los métodos de la sumación que examinamos. Es lógico exigir que el concepto generalizado de la suma *incluya* el concepto ordinario de suma, a decir más exactamente *la serie convergente en sentido corriente que tiene suma ordinaria S debe tener la suma generalizada que es también igual a S*. El método de sumación que posee dicha propiedad se denomina *regular*.

Luego, es lógico subordinar el concepto de suma generalizada a la siguiente condición: *si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ tiene la suma generalizada U y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ tiene la suma generalizada V, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (Au_k + Bv_k)$, siendo A y B constantes cualesquiera, tiene la suma generalizada $(AU + BV)$*. El método de la sumación que satisface dicha condición se denomina *lineal*. Como regla, en el análisis y sus aplicaciones se emplean *solamente métodos lineales regulares de la sumación*. Nos detengamos en dos métodos de la sumación generalizada que son de especial interés para las aplicaciones.

1. Método de Cesaro *) (o método de los promedios). Se dice que *la serie (4.117) es sumable por el método de Cesaro si existe el límite de los promedios de las sumas parciales de esta serie*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}. \tag{4.118}$$

Además, el límite (4.118) se denomina suma de la serie (4.117), generalizada según Cesaro.

La linealidad del método de la sumación de Cesaro es evidente. *La regularidad* del método de Cesaro se desprende del ejemplo 1 considerado en el Complemento 1 del cap. 3, tomo 1. En efecto, de dicho ejemplo se deduce que si la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales de la serie (4.117) converge al número S, entonces el límite (4.118) existe y es también igual a S.

Aduzcamos ejemplos de series que no convergen en sentido corriente pero son sumables por el método de Cesaro.

---

*) Ernesto Cesaro, matemático italiano (1859—1906).

1) Consideremos la serie divergente a ciencia cierta

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}=1-1+1-1+\ldots$$

Puesto que todas las sumas parciales *pares* S_{2n} de esta serie son iguales a cero, y todas las sumas parciales impares S_{2n-1} a la unidad, el límite (4.118) existe y es igual a 1/2. De este modo, la serie considerada es sumable por el método de Cesaro y su suma, según Cesaro, es igual a 1/2.

2) Tomando en consideración que x es cualquier número real fijado del intervalo $0<x<2\pi$, consideremos la serie que diverge a ciencia cierta*)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots \qquad (4.119)$$

En el ejemplo 2 al final del § 5 ya hemos calculado la suma parcial S_n de esta serie

$$S_n=\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Calculemos el promedio de las sumas parciales:

$$\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=\frac{1}{2n\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right]-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{4n\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}(\cos mx-\cos(m+1)x)\right]-\frac{1}{2}=\frac{\cos x-\cos(n+1)x}{4n\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$$

De aquí es evidente que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=-\frac{1}{2}.$$

De este modo, la serie (4.119) es sumable por el método de Cesaro y su suma según Cesaro es igual a $(-1/2)$.

2. Método de la sumación de Poisson)—Abel.** Este método de la sumación consiste en lo siguiente. *Según la serie dada (4.117) se compone la serie potencial*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^{k-1}=u_1+u_2x+u_3x^2+\ldots+u_kx^{k-1}+\ldots \qquad (4.120)$$

Si dicha serie potencial converge para todos los x del intervalo $0<x<1$ y la suma $S(x)$ de esta serie tiene el valor límite izquierdo $\lim_{x\to 1-0}S(x)$ en el punto $x=1$, se dice que la serie (4.117) es sumable por el método de Poisson—Abel. Además, dicho valor límite se denomina suma de la serie (4.117) según Poisson—Abel.

*) La divergencia de la serie (4.119) se deduce fácilmente de la expresión de su suma parcial dada a continuación.

**) Simeón Denis Poisson, matemático francés (1781—1840).

La linealidad del método de la sumación de Poisson—Abel no provoca dudas. Demostremos *la regularidad* de este método. Sea que la serie (4.117) converge en sentido corriente y tiene la suma igual a S. Es necesario demostrar: 1) que la serie (4.120) converge para cualquier x del intervalo $0 < x < 1$, 2) que la suma $S(x)$ de la serie (4.120) tiene el valor límite izquierdo igual a S en el punto $x = 1$.

Demostremos primero la afirmación 1). Dado que la serie (4.117) converge, entonces la sucesión de sus términos es *infinitesimal* y, por tanto, *acotada*, o sea, existe un número M tal que para todos los números k

$$|u_k| \leqslant M. \tag{4.121}$$

Empleando la desigualdad (4.121), estimemos el módulo de k-ésimo término de la serie (4.120) teniendo en cuenta que x es cualquier número fijado del intervalo $0 < x < 1$. Obtenemos

$$|u_k x^{k-1}| \leqslant M |x|^{k-1}.$$

Puesto que $|x| < 1$, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x|^{k-1}$ converge. Por tanto, en virtud de la observación 2 del teorema de comparación 4.3, converge también la serie (4.120).

Demostremos ahora la afirmación 2). Sea S_k k-ésima suma de la serie (4.117) y sea S su suma ordinaria. Empleando la transformación de Abel*), es fácil cerciorarse de que para todo x del intervalo $0 < x < 1$ es válida la identidad

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}. \tag{4.122}$$

Sustraigamos la identidad (4.122) de la siguiente identidad evidente:

$$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1}.$$

Además, denotando mediante r_k el k-ésimo resto de la serie (4.117), tendremos

$$S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}$$

o bien

$$S - S(x) = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}. \tag{4.123}$$

Nuestro objetivo es demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que el miembro izquierdo de (4.123) es menor que ε para todos los x que satisfacen las desigualdades $1 - \delta < x < 1$. Dado que el resto r_k de la serie (4.117) tiende a cero para $k \to \infty$, entonces para el número positivo $\varepsilon/2$ existe un número k_0 tal que $r_k < \varepsilon/2$ cuando $k \geqslant k_0$. De este modo,

$$\left| (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left| (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

*) Hemos establecido la transformación de Abel (4.82) en el p. 2 del § 5. En el caso considerado es necesario poner en (4.82) $n = 1$, $S_{n-1} = 0$ y después hacer tender p al infinito.

Queda por demostrar que para x bastante próximos a la unidad

$$\left| (1-x) \sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pero esto es obvio, puesto que la suma en la última desigualdad está acotada. La regularidad del método de Poisson—Abel queda demostrada. Como ejemplo volvamos a considerar la serie divergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{4.124}$$

Para esta serie compongamos la serie potencial de forma (4.120)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Es obvio que la última serie converge para todos los x del intervalo $0 \leqslant x < 1$ y tiene la suma igual a $S(x) = \frac{1}{1+x}$. Ya que

$$\lim_{x \to 1-0} S(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

la serie (4.124) es sumable por el método de Poisson—Abel y su suma según Poisson—Abel es igual a 1/2.

Fijemos la atención en que la suma de la serie (4.124) según Poisson—Abel coincide con su suma según Césaro. Este hecho no es casual: puede demostrarse que si la serie es sumable por el método de Césaro, es también sumable por el método de Poisson—Abel con tal de que la suma de esta serie según Césaro coincide con su suma según Poisson—Abel. Más que eso, existen series sumables por el método de Poisson—Abel pero no sumables por el método de Césaro*). La investigación detallada de todos los métodos posibles de la sumación generalizada de series divergentes se hace en la obra de G. Hardy «Divergent series», NY, Academic Press, 1948.

*) De este modo, puede decirse que el método de Poisson—Abel es más «efectivo» que el de Césaro.

Capitulo 5

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Concepto de función de varias variables

1. Sobre las dependencias funcionales entre varias magnitudes variables. Al estudiar muchos problemas de las ciencias naturales se encuentran dependencias entre varias magnitudes variables, en las cuales los valores de una de dichas magnitudes variables se determinan completamente por los valores de las demás variables. Así, por ejemplo, al analizar ciertas características físicas de un cuerpo (por ejemplo, su densidad ρ o temperatura T), hemos de considerar el cambio de estas características cuando pasamos de un punto del cuerpo a otro. Por cuanto cada punto del cuerpo se determina por tres coordenadas cartesianas x, y, z, las características en consideración (densidad ρ o temperatura T) se determinan mediante los valores de *tres* variables x, y, z.

Cuando se analizan los procesos físicos que varían con el tiempo, los valores de las características físicas se determinan por los valores de *cuatro* variables, tres coordenadas de un punto x, y, z y el tiempo t. Por ejemplo, al estudiar las oscilaciones acústicas de un gas la densidad ρ de este gas y la presión p se determinan por los valores de cuatro variables x, y, z y t. Para poder estudiar las dependencias de este género en el presente capítulo se introduce el concepto de función de varias variables y se desarrolla el aparato de investigación de semejantes funciones.

En la teoría de las funciones de varias variables es cómodo usar los términos geométricos. Está claro que de dominio de definición de una función de dos (o de tres) variables sirve cierto conjunto de puntos de un plano (o de un espacio). Con el fin de geometrizar nuestras nociones sobre una función de m variables es conveniente introducir el concepto de espacio m-dimensional que generaliza los conceptos bien conocidos de plano bidimensional y de espacio tridimensional. Empezaremos nuestra exposición ulterior aclarando los conceptos geométricos que nos harán falta.

2. Concepto de plano euclídeo y de espacio euclídeo. Los conceptos de coordenadas de los puntos sobre un plano y en un espacio, que se conocen por el curso de geometría analítica, así como la fórmula para determinar la distancia entre dos puntos, pueden ser empleados para la introducción analítica de los conceptos de plano y de espacio. *Un conjunto de toda clase de pares ordenados* (x, y) *de números reales* x *e* y *lleva el nombre de plano coordenado.*

En este caso cada par (x, y) se llamará punto de dicho plano y se denotará con la letra M. Los números x e y se denominan coordena-

das del punto M. La notación $M(x, y)$ significa que el punto M tiene coordenadas x e y.

Un plano coordenado se llama euclídeo si entre cualesquier dos puntos $M'(x', y')$ y $M''(x'', y'')$ del plano coordenado la distancia $\rho(M', M'')$ se define según la fórmula

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

De un modo análogo se introduce el concepto de espacios coordenado y euclídeo. *Un conjunto de toda clase de ternas ordenadas (x, y, z) de números x, y, z recibe el nombre de espacio coordenado.* En este caso cada terna (x, y, z) se llamará punto de dicho espacio y se denotará con la letra M. Los números x, y, z se llaman coordenadas del punto M. La notación $M(x, y, z)$ significa que el punto M tiene por coordenadas x, y, z.

Un espacio coordenado se denomina euclídeo si entre cualesquier dos puntos $M'(x', y', z')$ y $M''(x'', y'', z'')$ del espacio coordenado la distancia $\rho(M', M'')$ está definida según la fórmula

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}.$$

Los conceptos de plano coordenado y de espacio coordenado, introducidos más arriba, son análogos a la recta numérica, mientras que el plano euclídeo y el espacio euclídeo son análogos a la *recta euclídea*, que puede ser definida como recta numérica, entre cuyos dos puntos x' y x'' cualesquiera está definida la distancia $\rho(x', x'')$ según la fórmula $\rho(x', x'') = \sqrt{(x'' - x')^2} = |x'' - x'|$.

Veamos ciertos conjuntos $\{M\}$ de puntos del plano euclídeo y del espacio euclídeo.

1°. El conjunto $\{M\}$ de puntos del plano euclídeo, cuyas coordenadas x e y satisfacen la inecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant R^2$, se denomina, según se sabe, *círculo* de radio R con centro en el punto $M_0(a, b)$. Si las coordenadas x e y satisfacen la desigualdad estricta $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$, el conjunto $\{M\}$ se llama *círculo abierto*. En el espacio euclídeo el conjunto $\{M\}$ de puntos, cuyas coordenadas x, y, z satisfacen la desigualdad $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqslant R^2$, se llama, según se conoce, *esfera* de radio R con centro en el punto $M_0(a, b, c)$. Si las coordenadas x, y, z satisfacen la desigualdad estricta correspondiente, el conjunto $\{M\}$ se denomina *esfera abierta**).

2°. El conjunto $\{M\}$ de puntos del plano euclídeo (del espacio euclídeo), cuyas coordenadas x e y (x, y, z) satisfacen las inecuaciones $|x - a| \leqslant d_1$ e $|y - b| \leqslant d_2$ ($|x - a| \leqslant d_1$, $|y - b| \leqslant d_2$ y $|z - c| \leqslant d_3$), se llama *rectángulo coordenado* (*paralelepípedo coor-*

*) Es evidente que el círculo y la esfera son conjuntos $\{M\}$ de puntos de un plano y de un espacio, para los cuales $\rho(M, M_0) \leqslant R$.

denado) con centro en el punto M_0 (a, b) (en el punto M_0 (a, b, c)).

3. Concepto de función de dos y tres variables. Al hacer uso de los términos geométricos, podemos enunciar del modo siguiente el concepto, ya conocido, de función de una sola variable.

Si a todo punto M de cierto conjunto $\{M\}$ de puntos de la recta euclídea se le pone en correspondencia, de acuerdo con una ley conocida, un cierto número u, se dice que sobre el conjunto $\{M\}$ viene dada una función $u = u(M)$, o bien $u = f(M)$.

Introduzcamos ahora el concepto de función de dos variables.

Si a todo punto M de cierto conjunto de puntos $\{M\}$ del plano euclídeo se le pone en correspondencia, de acuerdo con una ley conocida, cierto número u, se dice que sobre el conjunto $\{M\}$ viene dada una función $u = u(M)$, o bien $u = f(M)$.

Advirtamos que el concepto de función de dos variables difiere del concepto, enunciado anteriormente, de función de una sola variable solamente en que en lugar de las palabras «recta euclídea» se emplea el término «plano euclídeo». De un modo análogo se introduce el concepto de función de tres variables. Con este fin, en lugar del conjunto $\{M\}$ de puntos del plano euclídeo se debe tomar un conjunto $\{M\}$ de puntos del espacio euclídeo.

Por cuanto el punto M del plano euclídeo se determina mediante dos coordenadas x e y, en tanto que el punto M del espacio euclídeo, mediante tres coordenadas x, y, z, para las funciones de dos y de tres variables se emplearán, respectivamente, las designaciones $u = f(x, y)$ y $u = f(x, y, z)$. Si la función $u = f(M)$ está definida sobre el conjunto $\{M\}$, dicho conjunto se denomina *dominio de definición de la función* $u = f(M)$. El número u, correspondiente al punto dado M del conjunto $\{M\}$, se llamará *valor particular de la función en el punto M*.

La colección $\{u\}$ de todos los valores particulares de la función $u = f(M)$ se llama *conjunto de valores de dicha función*.

Para una función de dos variables puede introducirse el concepto de gráfica: llámase *gráfica de la función* $u = f(x, y)$ *a una superficie, cuyos puntos tienen coordenadas* $(x, y, f(x, y))$.

He aquí unos ejemplos de funciones de dos y tres variables.

1°. $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. El dominio de definición de esta función es un círculo de radio 2 con centro en el origen de las coordenadas, mientras que el conjunto de valores es un segmento $0 \leqslant u \leqslant 2$.

2°. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$. El dominio de definición de esta función es un conjunto de puntos dispuestos fuera del círculo de radio 2 con centro en el origen de las coordenadas, en tanto que el conjunto de valores es una semirrecta abierta $u > 0$.

3°. $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$. El dominio de definición de esta función es un conjunto $\{M\}$ de puntos, cuyas coordenadas satisfacen la

inecuación $\cos(x^2 + y^2) \geqslant 0$. Esta inecuación es equivalente a las desigualdades $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k = 1, 2, \ldots$ De este modo, el conjunto $\{M\}$ se compone de un círculo de radio $\sqrt{\pi/2}$ con centro en el punto $O(0, 0)$ y de los dominios anulares (fig. 5.1).

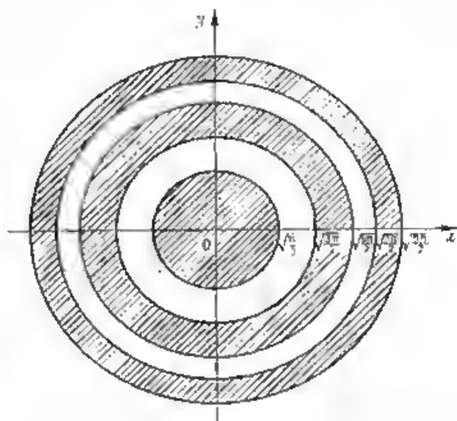


Fig. 5.1

4°. $u = \ln xyz$. El dominio de definición de esta función es un conjunto $\{M\}$ de puntos, cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad $xyz > 0$, en tanto que el conjunto de valores es toda la recta numérica $-\infty < u < +\infty$.

5°. $u = x^2 + y^2 + z^2$. El dominio de definición de esta función es todo el espacio euclídeo, en tanto que el conjunto de valores es la semirrecta $u \geqslant 0$.

4. Conceptos de espacio coordenado m-dimensional y de espacio euclídeo m-dimensional. *Un conjunto de toda clase de colecciones ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de m números $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se llama espacio coordenado m-dimensional A^m*

En este caso cada colección ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se denominará punto de este espacio y se denotará con la letra M. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se llaman coordenadas del punto M. La notación $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ significa que el punto M tiene coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Introduzcamos el concepto de *espacio euclídeo m-dimensional. Un espacio coordenado A^m recibe el nombre de espacio euclídeo m-dimensional E^m si entre dos puntos M' $((x_1', x_2', \ldots, x_m')$*

y $M''(x''_1, x''_2, \ldots, x''_m)$ *cualesquiera del espacio coordenado* A^m *está definida la distancia* *) $\rho(M', M'')$ según la fórmula

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2 + \ldots + (x''_m - x'_m)^2}. \quad (5.1)$$

Los conceptos introducidos de espacio coordenado *m*-dimensional A^m y de espacio euclídeo *m*-dimensional E^m son una generalización de los conceptos, mencionados más arriba, de espacio coordenado y de espacio euclídeo.

5. Conjuntos de puntos del espacio euclídeo *m*-dimensional E^m. Mediante el símbolo $\{M\}$ se denotará cierto conjunto de puntos del espacio euclídeo *m*-dimensional E^m. Analicemos algunos ejemplos de conjuntos en el espacio euclídeo *m*-dimensional E^m.

1°. El conjunto $\{M\}$ de toda clase de puntos, cuyas coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_m$ satisfacen la inecuación $(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_m - x_m^0)^2 \leqslant R^2$, se denomina *esfera m-dimensional* de radio R con centro en el punto $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$. De esto modo,

---

*) El espacio euclídeo *m*-dimensional es un *espacio métrico*. Un conjunto arbitrario $\{M\}$, cuyos elementos se llaman puntos, se llama espacio métrico si existe una regla, con cuya ayuda a dos puntos M' y M'' cualesquiera del conjunto $\{M\}$ se les pone en correspondencia cierto número $\rho(M', M'')$, denominado *distancia* entre dichos puntos. En este caso la citada regla ha de ser tal que se cumplan los axiomas (*axiomas del espacio métrico*) siguientes: 1) para M' y M'' cualesquiera $\rho(M', M'') = \rho(M'', M')$ (simetría de la distancia); 2) para M' y M'' cualesquiera $\rho(M', M'') \geqslant 0$, con la particularidad de que si $\rho(M', M'') = 0$, los puntos M' y M'' coinciden; 3) para tres puntos M', M'', M''' cualesquiera se cumple la desigualdad $\rho(M', M''') \leqslant \rho(M', M'') + \rho(M'', M''')$ (desigualdad triangular).

Cerciorémonos de que el espacio euclídeo *m*-dimensional introducido es realmente un espacio métrico. En efecto, la validez de los primeros dos axiomas del espacio métrico es obvia (véase la fórmula (5.1)). Vamos a probar la validez del tercer axioma.

Sean x'_i, x''_i, x'''_i las coordenadas de los puntos M', M'', M'''. Tenemos $\rho^2(M', M''') = \sum_{i=1}^{m} [(x'''_i - x''_i) + (x''_i - x'_i)]^2 = \sum_{i=1}^{m} (x'''_i - x''_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{m} (x'''_i - x''_i)(x''_i - x'_i) + \sum_{i=1}^{m} (x''_i - x'_i)^2$. Suponiendo $x'''_i - x''_i = a_i$ y $x''_i - x'_i = b_i$ y aprovechando la desigualdad de Buniakovski (véase la desigualdad (1.30) en el Complemento 1 al cap. 1) hallaremos que $\sum_{i=1}^{m} (x'''_i - x''_i)(x''_i - x'_i) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x'''_i - x''_i)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x''_i - x'_i)^2}$. De aquí proviene que

$$\rho^2(M', M''') \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x'''_i - x''_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x''_i - x'_i)^2}\right)^2,$$

es decir, $\rho(M', M''') \leqslant \rho(M', M'') + \rho(M'', M''')$.

una esfera m-dimensional se define como el conjunto $\{M\}$ de toda clase de puntos M, la distancia ρ de cada uno de los cuales hasta cierto punto M_0 (centro de la esfera) satisface la desigualdad $\rho(M, M_0) \leqslant R$. Si la distancia $\rho(M, M_0)$ de cada punto del conjunto $\{M\}$ hasta el punto M_0 satisface la desigualdad estricta $\rho(M, M_0) < R$, el conjunto $\{M\}$ se llama *esfera m-dimensional abierta.*

2°. El conjunto $\{M\}$ de puntos, la distancia de cada uno de los cuales hasta cierto punto M_0 satisface la relación $\rho(M, M_0) = R$, se llama *esfera m-dimensional* de radio R con centro en el punto M_0.

3°. El conjunto $\{M\}$ de puntos, cuyas coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_m$ satisfacen las inecuaciones $|x_1 - x_1^0| \leqslant d_1$, $|x_2 - x_2^0| \leqslant d_2, \ldots, |x_m - x_m^0| \leqslant d_m$ se llama *paralelepípedo coordenado m-dimensional*. Además, el punto $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ se llama centro de este paralelepípedo m-dimensional. Si las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de los puntos del conjunto $\{M\}$ satisfacen las desigualdades estrictas $|x_1 - x_1^0| < d_1$, $|x_2 - x_2^0| < d_2, \ldots, |x_m - x_m^0| < d_m$, el conjunto $\{M\}$ se llama *paralelepípedo coordenado m-dimensional abierto.*

Introduzcamos el concepto de ε-entorno del punto M_0 de un espacio euclídeo m-dimensional y el de *entorno rectangular del referido punto* M_0. *Llamaremos ε-entorno del punto $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ del espacio euclídeo m-dimensional E^m una esfera m-dimensional abierta de radio ε con centro en el punto M_0. Se denomina entorno rectangular del punto $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ de un espacio euclídeo m-dimensional un paralelepípedo coordenado m-dimensional abierto cualquiera con centro en el punto M_0.*

Es válida la siguiente afirmación evidente

Cualquier ε-entorno de un punto M_0 del espacio euclídeo m-dimensional E^m contiene cierto entorno rectangular de este punto. Un entorno rectangular cualquiera del punto M_0 contiene cierto ε-entorno del punto M_0.

Sea $\{M\}$ un conjunto de puntos del espacio euclídeo m-dimensional E^m. Introduzcamos los conceptos siguientes.

El punto M del conjunto $\{M\}$ se llama punto interior de dicho conjunto si existe cierto ε-entorno del punto M, cuyos puntos todos pertenecen al conjunto $\{M\}$.

*El punto M**) *se denomina punto de frontera del conjunto $\{M\}$ si todo ε-entorno de este punto contiene tanto los puntos pertenecientes al conjunto $\{M\}$, como también los que no pertenecen a $\{M\}$.*

El conjunto $\{M\}$ del espacio E^m se llama conjunto o dominio abierto si cualquier punto de dicho conjunto es interior.

Si todo punto de frontera del conjunto $\{M\}$ es punto de este conjunto, el conjunto $\{M\}$ se denomina cerrado.

---

*) Notamos que en este caso el punto M puede no pertenecer al conjunto $\{M\}$.

Si el conjunto $\{M\}$ es un dominio, el conjunto $\{\overline{M}\}$, obtenido sumando a $\{M\}$ todos los puntos de frontera de este conjunto, se denomina *dominio cerrado*.

Advirtamos que si todos los puntos del dominio $\{M\}$ se disponen en el interior de cierta esfera, este dominio se llama *limitado*.

En lo ulterior nos hará falta el concepto de *conjunto conexo*. Introduzcamos preliminarmente el concepto de *curva continua* en el espacio multidimensional E^m.

Llamaremos curva continua L en el espacio E^m al conjunto $\{M\}$ de puntos de este espacio, cuyas coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son funciones continuas de parámetro t:

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\ x_m = \varphi_m(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{5.2}$$

Diremos que los puntos $M'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ y $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ del espacio E^m *pueden unirse mediante una curva continua L* si existe una curva continua L tal, definida mediante las ecuaciones paramétricas (14.2), que

$$x_1' = \varphi_1(\alpha),\ x_2' = \varphi_2(\alpha),\ \ldots,\ x_m' = \varphi_m(\alpha),$$
$$x_1'' = \varphi_1(\beta),\ x_2'' = \varphi_2(\beta),\ \ldots,\ x_m'' = \varphi_m(\beta).$$

Enunciemos el concepto de conjunto conexo. *El conjunto $\{M\}$ del espacio E^m se llama conexo si dos puntos cualesquiera del mismo pueden ser unidos con una curva continua, cuyos puntos todos pertenecen a este conjunto.*

OBSERVACION. Advirtamos que a veces llámase dominio a un conjunto abierto y conexo, y no simplemente a un conjunto abierto.

Veamos el ejemplo siguiente.

El conjunto $\{M\}$ de puntos de E^m definido por la ecuación

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_m^2}{a_m^2} = 1, \tag{5.3}$$

se llama *elipsoide m-dimensional*. Los puntos de un elipsoide m-dimensional son puntos de frontera del conjunto $\{M\}$ de puntos M, cuyas coordenadas satisfacen una inecuación

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_m^2}{a_m^2} < 1.$$

Este conjunto es un conjunto de puntos interiores de un elipsoide m-dimensional.

El lector mismo puede convencerse con facilidad de que el conjunto de puntos interiores de un elipsoide m-dimensional es un conjunto abierto y conexo. Advirtamos que un elipsoide m-dimensional definido por la relación (14.3) es un conjunto cerrado.

El dominio de definición de la función

$$u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$$

es un conjunto *inconexo* (véase ejemplo 3° del p. 3 y fig. 5.1).

Para concluir, convengamos en llamar *entorno del punto M* a todo conjunto abierto conexo en el que está contenido M.

6. Concepto de función de m variables. Introduzcamos el concepto de función de m variables.

Si a todo punto M del conjunto $\{M\}$ de puntos del espacio euclídeo m-dimensional E^m se le pone en correspondencia, de acuerdo con una ley determinada, cierto número u, suele decirse que sobre el conjunto $\{M\}$ está dada la función $u = u(M)$, o $u = f(M)$. En este caso el conjunto $\{M\}$ se llama *dominio de definición de la función* $u = f(M)$.

El número u, correspondiente al punto dado M del conjunto $\{M\}$, se llamará *valor particular de la función en el punto M*. La colección $\{u\}$ de todos los valores particulares de la función $u = f(M)$ se denomina *conjunto de valores* de dicha función. Por cuanto el punto M se define mediante las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_m$, para la función $u = f(M)$ de m variables se emplea también la designación $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Veamos unos ejemplos de funciones de m variables.

1°. Sea $u = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_m^2}$. Como dominio de definición de esta función interviene, evidentemente, una esfera m-dimensional de radio 1 con centro en el punto $O(0, 0, \ldots, 0)$. Es conjunto de valores de la función en consideración el segmento $[0, 1]$.

2°. Sea $u = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \ldots - \frac{x_m^2}{a_m^2}}}$. Como dominio de definición de la función sirve el conjunto $\{M\}$ de puntos interiores de un elipsoide m-dimensional. El conjunto de valores de esta función está representado por una semirrecta $u \geqslant 1$.

§ 2. Valor límite de una función de varias variables

1. Sucesiones convergentes de puntos en un espacio euclídeo m-dimensional E^m. Criterio de convergencia (de Cauchy) de una sucesión. Examinemos en el espacio euclídeo m-dimensional E^m una sucesión de puntos $\{M_n\}$ *). Enunciemos la definición siguiente.

La sucesión $\{M\}$ de puntos del espacio euclídeo E^m se llama convergente si existe un punto A tal que para un número positivo ε cualquiera puede indicarse un número N **) *tal que para $n \geqslant N$ se cumple la inecuación $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. En este caso el punto A se denomina*

*) El concepto de sucesión de puntos en el espacio euclídeo E^m se define del modo siguiente. Supongamos que a todo número n de una serie natural de números $1, 2, \ldots, n, \ldots$ se le pone en correspondencia un punto M_n del espacio euclídeo E^m. La serie de puntos $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ que aparece en este caso y se examina en el orden indicado, se denomina *sucesión* de puntos del espacio euclídeo E^m. Para mayor brevedad, dicha sucesión se denotará con el símbolo $\{M_n\}$.

**) Por cuanto el número N depende, como regla, de ε, a veces se escribe $N = N(\varepsilon)$.

límite de la sucesión $\{M_n\}$. Para designar el límite A de la sucesión $\{M_n\}$ se emplea el símbolo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = A, \quad \text{o bien} \quad M_n \to A \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Demostremos el lema siguiente.

Lema 1. *Supongamos que la sucesión* $\{M_n\}$ *de puntos del espacio euclídeo* E^m *converge hacia el punto* A. *Entonces, las sucesiones* $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$ *de coordenadas de los puntos* M_n *convergen hacia las coordenadas correspondientes* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *del punto* A, *y, viceversa, si las sucesiones* $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$ *de coordenadas de los puntos* M_n *convergen, respectivamente, hacia los números* a_1, $a_2, \ldots, a_m$, *la sucesión* $\{M_n\}$ *converge hacia el punto* A *que tiene coordenadas* $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la primera parte del lema. Si la sucesión $\{M_n\}$ converge hacia el punto A, puede indicarse, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, un número N tal que para $n \geqslant N$ se cumple la desigualdad $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. Sean $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ las coordenadas del punto M_n, y sean $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, las coordenadas del punto A. Entonces, la desigualdad $\rho(M_n, A) < \varepsilon$ puede escribirse del modo siguiente:

$$\sqrt{(x_1^{(n)}-a_1)^2+(x_2^{(n)}-a_2)^2+\ldots+(x_m^{(n)}-a_m)^2} < \varepsilon. \qquad (5.4)$$

De aquí se deduce que, cuando $n \geqslant N$, se cumplen las inecuaciones

$$|x_1^{(n)}-a_1| < \varepsilon, \quad |x_2^{(n)}-a_2| < \varepsilon, \quad \ldots, \quad |x_m^{(n)}-a_m| < \varepsilon.$$

Dicho de otro modo, las sucesiones $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$ de coordenadas de los puntos M_n convergen, respectivamente, hacia los números $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Demostremos ahora la afirmación inversa. Supongamos que las sucesiones citadas de coordenadas de los puntos M_n convergen, respectivamente, hacia los números $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ pueden indicarse unos números $N_1, N_2, \ldots, N_m$ tales que para $n \geqslant N_1$, $n \geqslant N_2$, ..., $n \geqslant N_m$ se cumplan las inecuaciones correspondientes

$$|x_1^{(n)}-a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad |x_2^{(n)}-a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad \ldots, \quad |x_m^{(n)}-a_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

De aquí se deduce que para $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$ se cumple la inecuación (14.4). En otras palabras, cuando $n \geqslant N$, se cumple la inecuación $\rho(M_n, A) < \varepsilon$, donde A es un punto de E^m con las coordenadas $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Así, pues, la sucesión $\{M_n\}$ converge hacia el punto A. El lema queda demostrado.

Formulemos la definición de sucesión fundamental de puntos en un espacio euclídeo m-dimensional. *La sucesión* $\{M_n\}$ *de puntos de un espacio euclídeo m-dimensional se denomina fundamental, o suce-*

sión de Cauchy si para cualquier número positivo ε *puede indicarse un número N tal que para* $n \geqslant N$ *y para cualquier p natural se cumple la desigualdad* $\rho(M_{n+p}, M_n) < \varepsilon$. Es válido el siguiente criterio de convergencia de una sucesión (criterio de Cauchy).

Para que la sucesión $\{M_n\}$ *de puntos de un espacio euclídeo m-dimensional sea convergente, es necesario y suficiente que la misma sea fundamental.* Con el fin de convencerse de la validez del criterio enunciado, basta notar que el carácter fundamental de la sucesión $\{M_n\}$ determina el carácter fundamental de las sucesiones $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$ de coordenadas de los puntos M_n y, viceversa, si las sucesiones mencionadas de coordenadas son fundamentales, lo será también la sucesión $\{M_n\}$, y luego basta aplicar el criterio de Cauchy para las sucesiones numéricas a las sucesiones de coordenadas de los puntos $\{M_n\}$ y el lema 1, enunciado más arriba.

2. Algunas propiedades de las sucesiones acotadas de puntos en un espacio euclídeo m-dimensional. Introduzcamos el concepto de sucesión acotada de puntos en un espacio euclídeo *m*-dimensional. *La sucesión* $\{M_n\}$ *de puntos de un espacio euclídeo m-dimensional se denomina acotada si existe tal número* $a > 0$ *que para todo n se cumple la desigualdad* $\rho(O, M_n) \leqslant a$, *donde O es un punto cuyas coordenadas son todas iguales a cero.* Dicho de otro modo, la sucesión $\{M_n\}$ está acotada si todos los puntos M_n de esta sucesión están en el interior o en la frontera de cierta esfera con centro en el origen de las coordenadas.

Es válido el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 5.1 ***(teorema de Bolzano—Weierstrass).*** *En sucesión acotada* $\{M_n\}$ *de puntos de un espacio euclídeo m-dimensional se puede distinguir una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Primero cerciorémonos de que las sucesiones $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$ de coordenadas de los puntos M_n están acotadas. En efecto, por cuanto la sucesión $\{M_n\}$ está acotada, para todos los n se cumple la desigualdad $\rho(O, M_n) \leqslant a$. Dado que $\rho(O, M_n) = \sqrt{x_1^{(n)2} + x_2^{(n)2} + \ldots + x_m^{(n)2}}$, de aquí se infiere que para todo n se cumplen las inecuaciones $|x_1^{(n)}| \leqslant a$, $|x_2^{(n)}| \leqslant a$, ..., $|x_m^{(n)}| \leqslant a$. En otras palabras, las sucesiones $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$ de coordenadas de los puntos M_n están acotadas. En virtud del teorema de Bolzano—Weierstrass para las sucesiones numéricas (véase p. 4, § 4, cap. 3, t. I), en la sucesión $\{x_1^{(n)}\}$ se puede distinguir una sucesión $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ que converge hacia cierto número a_1. Examinemos la subsucesión correspondiente $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ de la sucesión de segundas coordenadas de los puntos M_n. En vista del mismo teorema, en la subsucesión $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ se puede distinguir una subsucesión $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ que converge hacia cierto número a_2. Advirtamos que la subsucesión $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ de la sucesión $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$

converge hacia el número a_1. Así, pues, las sucesiones $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ y $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ convergen hacia los números a_1 y a_2, respectivamente. Es evidente que al distinguir en la subsucesión $\{x_3^{(n_{k_2})}\}$ de la sucesión de terceras coordenadas de los puntos M_n una subsucesión $\{x_3^{(n_{k_3})}\}$ que converge hacia cierto número a_3, las subsucesiones $\{x_1^{(n_{k_3})}\}$, $\{x_2^{(n_{k_3})}\}$, $\{x_3^{(n_{k_3})}\}$ convergen hacia los números respectivos a_1, a_2, a_3. Continuando estos razonamientos, obtendremos, en fin, una subsucesión $\{x_m^{(n_{k_m})}\}$, convergente hacia cierto número a_m, de la sucesión de m-ésimas coordenadas de los puntos M_n, con la particularidad de que las subsucesiones $\{x_1^{(n_{k_m})}\}$, $\{x_2^{(n_{k_m})}\}$, . . ., $\{x_m^{(n_{k_m})}\}$ convergen hacia los números a_1, a_2, . . ., a_m, respectivamente. Mas, en este caso, debido al lema 1, la subsucesión $\{M_{n_{k_m}}\}$ de la sucesión de puntos $\{M_n\}$ converge hacia el punto A que tiene por coordenadas a_1, a_2, . . ., a_m. El teorema está demostrado.

OBSERVACION. El límite A de la sucesión $\{M_n\}$ de puntos pertenecientes al conjunto cerrado $\{M\}$ pertenece también a dicho conjunto. Para cerciorarnos de ello, basta notar que en cualquier ε-entorno del punto A hay puntos M_n, es decir, puntos del conjunto $\{M\}$, por lo cual el punto A es o bien un punto interior o bien un punto de frontera de $\{M\}$, y, por consiguiente, pertenece a $\{M\}$.

3. Concepto de valor límite de una función de varias variables. Examinemos la función $u = f(M)$, definida sobre el conjunto $\{M\}$ de un espacio euclídeo m-dimensional, y un punto A de dicho conjunto que, quizás, no pertenece al conjunto $\{M\}$, pero posee la propiedad de que en cualquier ε-entorno de este punto está contenido al menos un punto del conjunto $\{M\}$, distinto de A.

Definición 1. *El número b se llama valor límite de la función $u = f(M)$ en un punto A (o bien límite de la función para $M \to A$) si para cualquier sucesión M_1, M_2, . . ., M_n, . . . de puntos del conjunto $\{M\}$, la cual converge hacia A y cuyos elementos M_n son distintos de A* *) *($M_n \neq A$), la sucesión correspondiente $f(M_1)$, $f(M_2)$, . . ., $f(M_n)$ . . . de valores de la función converge hacia b.*

La definición aducida se llama definición de valor límite de una función con ayuda de las sucesiones. Formulemos otra definición de valor límite de una función, utilizando la «ε — δ» terminología.

Definición 2. *El número b se denomina valor límite de la función $u = f(M)$ en el punto A si para cualquier número positivo ε puede indicarse un número positivo δ tal que para todos los puntos M del dominio de definición de la función que satisfacen la condición $0 < \rho(M, A) < \delta$ se verifica la inecuación $|f(M) - b| < \varepsilon$.*

OBSERVACION. Las definiciones 1 y 2 de valor límite de una función son equivalentes. La validez de esta afirmación puede ser de-

*) Este requisito se debe, en particular, a que la función $u = f(M)$ puede estar no definida en el punto A.

mostrada del mismo modo que la equivalencia de dos definiciones de valor límite de una función de una sola variable. Para denotar el valor límite b de la función $u = f(M)$ en el punto A se aplica el símbolo siguiente

$$\lim_{M \to A} f(M) = b, \quad \text{o bien} \quad \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b,$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_m$ son las coordenadas del punto A.

Enunciemos la definición de valor límite de una función cuando el punto M tiende al infinito.

Definición 3. El número b se llama valor límite de la función $u = f(M)$ cuando $M \to \infty$ (o bien límite de la función cuando $M \to \infty$) si para cualquier número positivo ε puede indicarse el número positivo a tal que para todos los puntos M del dominio de definición de la función que satisfacen la condición $\rho(O, M) > a$, se cumple la inecuación $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Las operaciones aritméticas con las funciones de m variables que tienen el valor límite en el punto A conducen a unas funciones que también tienen su valor límite en el mismo punto A. A saber, es válida la afirmación siguiente.

Supongamos que las funciones $f(M)$ y $g(M)$ tienen en el punto A los valores límites b y c. Entonces, las funciones $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ y $\frac{f(M)}{g(M)}$ tienen en A sus valores límites (el cociente, a condición de que $c \neq 0$) iguales a $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$, $\frac{b}{c}$, respectivamente.

La demostración de esta afirmación es análoga a la del teorema 4.1.

4. Funciones infinitésimas. *La función $u = f(M)$ se llama infinitésima en el punto A (cuando $M \to A$) si $\lim_{M \to A} f(M) = 0$.*

Es fácil convencerse de que la función $f(M) = (x_1 - a_1)^{n_1} + \dots + (x_m - a_m)^{n_m}$, donde $n_1, \dots, n_m$ son números positivos, es infinitésima en el punto $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ *).

Si la función $u = f(M)$ tiene en A el valor límite igual a b, la función $\alpha(M) = f(M) - b$ es infinitésima en el punto A. En efecto, $\lim_{M \to A} \alpha(M) = \lim_{M \to A} (f(M) - b) = \lim_{M \to A} f(M) - \lim_{M \to A} b = 0$. Haciendo uso de este resultado, obtendremos la representación especial para una función que tiene su valor límite igual a b en el punto A:

$$f(M) = b + \alpha(M), \quad \text{donde} \quad \lim_{M \to A} \alpha(M) = 0.$$

*) Basta considerar que cada una de las funciones de una sola variable $x_k) = (x_k - a_k)^{n_k}$ es infinitésima en el punto $x_k = a_k$.

Las funciones infinitésimas de varias variables se comparan de un modo igual al mencionado en el p. 3, § 2, cap. 4, t. 1 para funciones infinitésimas de una sola variable. Advirtamos que, al igual que en el caso de variable única, por símbolo $o(\beta)$ se entenderá cualquier función infinitésima en el punto dado A, cuyo orden de pequeñez es más elevado en comparación con la función $\beta(M)$, infinitésima en el punto dado A.

5. **Condición necesaria y suficiente de existencia del valor límite de una función (criterio de Cauchy).** Diremos que la función $f(M)$ *satisface la condición de Cauchy en el punto* $M = A$ si para cualquier número positivo ε existe un número positivo δ tal, cualesquiera que sean dos puntos M' y M'' del dominio de definición de la función $f(M)$ que satisfacen las inecuaciones $0 < \rho(M', A) < \delta$, $0 < \rho(M'', A) < \delta$, para los valores correspondientes de las funciones se verifica la inecuación

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon.$$

Es válido el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 5.2 *(criterio de Cauchy). Para que la función $f(M)$ tenga en el punto $M = A$ su valor límite finito, es necesario y suficiente que la función $f(M)$ satisfaga en este punto la condición de Cauchy.* La demostración de este teorema es plenamente análoga a la del teorema 3.2 y se obtiene de esta última sustituyendo las letras x y a por M y A y cambiando las expresiones de la forma $|x - a|$ por el símbolo $\rho(M, A)$.

6. **Valores límites reiterados.** Para la función de varias variables $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se puede definir el concepto de valor límite respecto de una de las variables x_k, siendo fijos los valores de las demás variables. En esta situación surge el concepto de *valor límite reiterado*. Aclarémoslo con ayuda del ejemplo de función $u = f(x, y)$ de dos variables x e y. Sea que la función $u = f(x, y)$ está definida en cierto entorno rectangular $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ del punto $M_0(x_0, y_0)$, a excepción, quizás, del propio punto M_0. Supongamos que para todo y fijo que satisface la condición $0 < |y - y_0| < d_2$, existe el valor límite de la función $u = f(x, y)$ de una variable x en el punto $x = x_0$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \text{ fijo}}} f(x, y) = \varphi(y),$$

y que, además, existe el valor límite b de la función $\varphi(y)$ en el punto $y = y_0$,

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = b.$$

En este caso se dice que existe el valor límite *reiterado* b para la función $u = f(x, y)$ en el punto M_0, el cual se denota del modo siguiente:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b$$

Análogamente se define el valor límite reiterado

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

Demos a conocer las condiciones suficientes de igualdad entre dos valores límites reiterados recién introducidos.

Teorema 5.3. *Supongamos que la función $u = f(x, y)$ está definida en cierto entorno rectangular $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ del punto $M_0(x_0, y_0)$ y tiene en dicho punto el valor límite b. Admitamos también que para cualquier x fijo, $0 < |x - x_0| < d_1$, existe el valor límite $\psi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ y para cualquier y fijo, $0 < |y - y_0| < d_2$, existe el valor límite $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$. En este caso existen los valores límites reiterados $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ y $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, iguales a b.*

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto la función $u = f(x, y)$ tiene en $M_0(x_0, y_0)$ el valor límite b, podemos indicar para todo $\varepsilon > 0$ tal $\delta > 0$ que cuando $|x - x_0| < \delta$ e $|y - y_0| < \delta$ se cumple la inecuación $|f(x, y) - b| < \varepsilon$. De este modo, en el entorno rectangular $|x - x_0| < \delta$ e $|y - y_0| < \delta$ del punto M_0 los valores de la función $f(x, y)$ se diferencian de b en una magnitud no superior a ε. Mas, en este caso, los valores límites $\psi(x)$ y $\varphi(y)$, aducidos en la formulación del teorema, para x e y que satisfacen las inecuaciones $|x - x_0| < \delta$ e $|y - y_0| < \delta$, también difieren de b en una magnitud no superior a ε. Por consiguiente, los valores límites de estas funciones en los puntos x_0 e y_0 existen y son iguales a b. El teorema está demostrado.

Se puede definir el concepto de límite reiterado para las llamadas sucesiones dobles $\{a_{mn}\}$, cuyos elementos a_{mn} se determinan por dos índices m y n. A saber: el símbolo $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{m \to \infty} a_{mn}$ quiere decir que al principio se define una sucesión $\{b_n\}$, $b_n = \lim\limits_{m \to \infty} a_{mn}$, y luego se halla el límite de esta sucesión $\{b_n\}$.

Veamos, por ejemplo, la sucesión doble $\{a_{mn}\}$, donde $a_{mn} = \cos^m 2\pi n! x$, x es un número fijo. Demostremos que

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \cos^m 2\pi n! x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

En efecto, si $x = p/q$, donde p y q son números enteros, para $n \geqslant q$ tenemos $\cos 2\pi n! x = 1$, y, por eso, $\lim\limits_{\substack{m \to \infty \\ n \geqslant q}} \cos^m 2\pi n! x = 1$. En otras palabras, si x es un número racional, se tiene $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{m \to \infty} \cos^m 2\pi n! x = 1$. Si, en cambio, x es irracional, para todo n se cumple la inecuación $|\cos 2\pi n! x| < 1$, por lo que $\lim\limits_{m \to \infty} \cos^m 2\pi n! x = 0$, es decir, $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{m \to \infty} \cos^m 2\pi n! x = 0$.

OBSERVACIÓN. Haciendo uso del resultado obtenido, podemos definir analíticamente la función de Dirichlet (véase p. 1, § 1, cap. 4, t. 1), como límite reiterado $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{m \to \infty} \cos^m 2\pi n! x$.

§ 3. Funciones continuas de varias variables

1. Definición de continuidad de una función de varias variables. Supongamos que el punto A pertenece al dominio de definición de la función $u = f(M)$ de varias variables y que cualquier ε-entorno

del punto A contiene puntos, distintos de A, del dominio de definición de dicha función.

Definición 1. *La función $u = f(M)$ se llama continua en el punto A si el valor límite de esta función en el punto A existe y es igual al valor particular de $f(A)$.* Advirtamos que por cuanto $A = \lim\limits_{M\to A} M$, la condición de continuidad de la función puede ser escrita en la forma siguiente

$$\lim_{M\to A} f(M) = f\left(\lim_{M\to A} M\right).$$

Los puntos, donde la función no posee la propiedad de continuidad, se llaman *puntos de discontinuidad* de esta función.

Formulemos la definición de continuidad de una función, empleando la definición de valor límite de una función con ayuda de ε y δ.

Definición 2. *La función $u = f(M)$ se llama continua en el punto A si para cualquier número positivo ε puede indicarse tal número positivo δ que para todo M del dominio de definición de la función que satisface la condición $\rho(M, A) < \delta$, se cumple la inecuación $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.*

Definición 3. *La función $u = f(M)$ se llama continua sobre el conjunto $\{M\}$ si lo es en cada punto de dicho conjunto.*

Llamemos *incremento* o *incremento total de la función $u = f(M)$ en el punto A la función Δu que se define mediante la fórmula*

$$\Delta u = f(M) - f(A), \tag{5.5}$$

donde M es un punto cualquiera del dominio de definición de la función. Supongamos que A y M tienen coordenadas respectivas $a_1, a_2, \ldots, a_m$ y $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Denotemos $x_1 - a_1 = \Delta x_1$, $x_2 - a_2 = \Delta x_2, \ldots, x_m - a_m = \Delta x_m$. Utilizando estas denotaciones, obtendremos la siguiente expresión para el incremento de la función Δu, correspondiente a los incrementos de los argumentos $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$:

$$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m). \tag{5.6}$$

Evidentemente, *para que la función $u = f(M)$ sea continua en el punto A, es necesario y suficiente que su incremento Δu sea una función infinitésima en el punto A*, es decir, es necesario y suficiente que se verifique la igualdad

$$\lim_{M\to A} \Delta u = \lim_{M\to A} [f(M) - f(A)] = 0, \quad \text{o bien} \quad \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0\\ \Delta x_2 \to 0\\ \cdots\\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0 \tag{5.7}$$

La condición (5.7) se llamará *forma en diferencias de la condición de continuidad de la función $u = f(M)$ en el punto A*.

Para la función de varias variables $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ podemos definir el concepto de continuidad respecto de una de las variables, siendo fijos los valores de las demás variables. Para definir este concepto, examinemos los llamados *incrementos parciales* de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ perteneciente al dominio de definición de la función. Fijemos todos los argumentos, a excepción del primero, y atribuyamos al primer argumento un incremento arbitrario Δx_1 tal que el punto con las coordenadas $x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_m$ esté en el dominio de definición de la función. El incremento correspondiente de la función se denomina *incremento parcial* *) de la función en el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ correspondiente al incremento Δx_1 del argumento x_1 y se designa por $\Delta_{x_1} u$. De este modo,

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \quad (5.8)$$

De un modo igual se definen los incrementos parciales de la función correspondientes a los incrementos de otros argumentos:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{x_2} u = f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_{x_m} u = f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{array}\right\} \quad (5.9)$$

Introduzcamos ahora el concepto de continuidad de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ respecto de una de las variables.

La función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se llama continua en el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ respecto de la variable x_k si el incremento parcial $\Delta_{x_k} u$ de esta función en el punto M es una función infinitésima de Δx_k, es decir, si

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} u = 0. \quad (5.10)$$

Siendo fijas todas las variables, a excepción de la x_k, la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es la función solamente de esta variable. Notemos que la continuidad de la función respecto de la variable x_k significa la continuidad de esta función de variable única. Es evidente que de la condición de continuidad de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en el punto dado M se desprende la continuidad de esta función en el punto M respecto de cada una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Sin embargo, de la continuidad de la función en el punto M respecto de cada una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ no se deduce, por regla general, la continuidad de la función en este punto. Para cerciorarnos de ello, veamos los ejemplos siguientes.

1°. Diremos que la función $u = f(M) = f(x, y)$ es continua en el punto M sobre cierta recta que pasa por dicho punto, si para

*) El término «incremento parcial» se emplea para distinguir este incremento del incremento total (5.6) correspondiente a los incrementos arbitrarios $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ de todos los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

toda sucesión de puntos $\{M_n\}$ de esta recta convergente hacia el punto M la sucesión correspondiente $\{f(M_n)\}$ de valores de la función tiene por límite el valor particular $f(M)$ de la función en el punto M. Por cuanto sobre una recta la función $u = f(x, y)$ es una función de una sola variable, el concepto de continuidad de la función sobre la recta coincide, obviamente, con el de continuidad de la citada función de una sola variable. En particular, la continuidad de la función en el punto M respecto de cada una de las variables x e y es su continuidad sobre las rectas que pasan por el punto M, paralelas a los ejes coordenados. Demostremos que la función

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{para} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{para} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

es continua en el punto $O(0, 0)$ respecto de cada una de las variables x e y, es decir, es continua en cada uno de los ejes coordenados, pero no lo es sobre las demás rectas que pasan por este punto, por lo cual no es continua en el punto O. Cada recta, distinta de los ejes coordenados, que pasa por el punto $O(0, 0)$ puede ser representada mediante la ecuación $y = kx$, donde $k \neq 0$. Es obvio que en semejante recta todos los valores de la función son constantes e iguales a $\frac{k}{1+k^2}$. Por eso, si la sucesión $\{M_n\}$ de puntos de semejante recta, distintos del punto O, converge hacia el punto O, la sucesión correspondiente de valores de la función tiene por límite $\frac{k}{1+k^2}$. Por cuanto este límite es distinto de cero cuando $k \neq 0$ y no coincide con el valor particular de la función en el punto O, la función es discontinua en dicho punto de la recta en consideración. La continuidad de una función sobre los ejes coordenados se deduce de que sus valores en los mismos son iguales a cero.

Puede formarse la impresión de que si una función de dos variables es continua sobre una recta cualquiera que pasa por un punto dado, dicha función es continua en el citado punto. El ejemplo que sigue muestra que en el caso general esto no es así.

2°. Veamos la función

$$u = f(M) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{para} \quad x^4+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x^4+y^2 = 0. \end{cases}$$

Demostremos que, aunque la función mencionada es continua en toda recta que pasa por el punto $O(0, 0)$, no lo es, sin embargo, en este punto. En efecto, los valores de la función en la recta $y = kx$ son iguales a $\frac{kx}{x^2+k^2}$, y por eso, $u \to 0$ cuando $x \to 0$. La continuidad de esta función sobre el eje Oy se deduce de que sus valores en este eje son iguales a cero. Por otra parte, los valores de la fun-

ción en la parábola $y = px^2$ son constantes e iguales a $\frac{p}{1+p^2}$, razón por la cual el valor límite de la función, cuando el punto M tiende al punto O a lo largo de la parábola es igual también a $\frac{p}{1+p^2}$. Como que para $p \neq 0$ este límite es distinto de cero y no coincide con el valor particular de la función en el punto O, la función será discontinua en este punto.

2. Propiedades principales de las funciones continuas de varias variables. A continuación daremos a conocer las propiedades principales de las funciones continuas de varias variables. Por cuanto la demostración de estas propiedades es, en lo principal, análoga a la de las propiedades correspondientes de las funciones de una sola variable, ofreceremos sólo breves explicaciones otorgando al lector la posibilidad de demostrar los pormenores.

1°. OPERACIONES ARITMÉTICAS SOBRE LAS FUNCIONES CONTINUAS. Es válida la siguiente afirmación.

Supongamos que las funciones $f(M)$ y $g(M)$ son continuas en el punto A. Entonces, las funciones $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ y $\frac{f(M)}{g(M)}$ son continuas en el punto A (el cociente, a condición de que $g(A) \neq 0$). Esta afirmación se demuestra de un modo análogo al empleado en la demostración del teorema 4.2.

2°. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA. Introduzcamos el concepto de función compuesta de varias variables. Supongamos que las funciones

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k) \end{array}\right\} \qquad (14.11)$$

están definidas sobre el conjunto $\{N\}$ del espacio euclídeo E^k ($t_1, t_2, \ldots, t_k$) son las coordenadas de los puntos en este espacio). Entonces, a todo punto $N(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ del conjunto $\{N\}$ se le pone en correspondencia, con ayuda de las fórmulas (14.11), un punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ del espacio euclídeo E^m. Denotemos con $\{M\}$ el conjunto de todos los puntos de este género. Sea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ una función de m variables definida sobre el citado conjunto $\{M\}$. En este caso diremos que sobre el conjunto $\{N\}$ del espacio euclídeo E^k viene definida la *función compuesta* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son las funciones de las variables $t_1, t_2, \ldots, t_k$, con la particularidad de que dichas funciones se definen mediante las relaciones (14.11). Es válida la afirmación siguiente.

Supongamos que las funciones $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, ..., $x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ son continuas

en el punto $A(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, *mientras que la función* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *lo es en el punto* $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, *donde* $b_i = \varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Entonces, la función compuesta* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *donde* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *son funciones de los argumentos* $t_1, t_2, \ldots, t_k$, *definidas más arriba, es continua en el punto* $A(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Esbocemos las etapas principales de demostración de esta afirmación. Sea $\{N_n\}$, $N_n \neq A$, una sucesión arbitraria de puntos, convergente hacia A, del dominio $\{N\}$ de definición de las funciones $\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, y sea $\{M_n\}$ la sucesión correspondiente de puntos cuyas coordenadas $x_i^{(n)}$ son iguales a $\varphi_i(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)})$. Como las funciones φ_i son continuas en el punto A, la sucesión $\{M_n\}$ converge hacia el punto $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ (no se excluye la posibilidad de que los puntos M_n y B coincidan). En virtud de que las funciones $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ son continuas en el punto B, la sucesión $\{f(M_n)\}$ converge hacia $f(B)$. Mas, ésta es una sucesión de valores de una función compuesta que corresponde a la sucesión $\{N_n\}$ de puntos del dominio de su definición que converge hacia A. Ahora, cuando estamos convencidos de que la sucesión $\{f(M_n)\}$ converge hacia el valor particular $f(B)$, la continuidad de la función compuesta queda demostrada.

OBSERVACIÓN. La demostración aducida generaliza para el caso de varias variables la demostración del teorema 4.5 de la continuidad de una función compuesta de una sola variable.

3° TEOREMA DE LA ESTABILIDAD DEL SIGNO DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

Teorema 5.4. Si la función $u = f(M)$ *es continua en el punto* A *del espacio euclídeo* E^m *y si* $f(A) \neq 0$, *existe un* δ*-entorno del punto* A, *dentro del cual en todo punto del dominio de definición de la función* $f(M)$, *ésta no se anula y tiene el signo idéntico al de* $f(M)$. La validez de este teorema se deduce directamente de la definición de continuidad de una función en términos de «$\varepsilon - \delta$».

4° TEOREMA DE QUE UNA FUNCIÓN CONTINUA PASA POR CUALQUIER VALOR INTERMEDIO

Teorema 5.5. Sea $u = f(M)$ *una función continua en todos los puntos del conjunto conexo* $\{M\}$ *del espacio euclídeo* E^m, *con la particularidad de que* $f(A)$ *y* $f(B)$ *son los valores de esta función en los puntos* A *y* B *de dicho conjunto. Supongamos, además, que* C *es un número cualquiera encerrado entre* $f(A)$ *y* $f(B)$. *Entonces, en toda curva continua* L *que une los puntos* A *y* B *y que está íntegramente dispuesta en* $\{M\}$ *existe un punto* N *tal que* $f(N) = C$.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_m = \varphi_m(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

la ecuación de la curva continua L que une los puntos A y B del conjunto M y que está íntegramente dispuesta en $\{M\}$ (véase p. 5, § 1). Sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ está definida la función compuesta $u =$

$= f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, donde $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Es evidente que los valores de esta función en $[\alpha, \beta]$ coinciden con los de la función $u = f(M)$ en la curva L. La citada función compuesta de una sola variable t es continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ en virtud de la afirmación en la sección 2° de este punto, y, de acuerdo con el teorema 8.6, en cierto punto ξ del segmento $[\alpha, \beta]$ toma el valor C. Por eso, en el punto N de la curva L con coordenadas $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$, $\ldots$, $\varphi_m(\xi)$ se verifica la igualdad $f(N) = C$. El teorema está demostrado.

5°. CARÁCTER ACOTADO DE UNA FUNCIÓN, CONTINUA SOBRE UN CONJUNTO ACOTADO CERRADO.

Teorema 5.6 (primer teorema de Weierstrass). *Si la función $u = f(M)$ es continua en el conjunto acotado cerrado $\{M\}$, es acotada sobre dicho conjunto.* Detengámonos en la demostración del carácter acotado de $u = f(M)$ por arriba. Supongamos que $u = f(M)$ no está acotada superiormente en $\{M\}$. Al igual que en la demostración del teorema análogo 8.7, seleccionemos la sucesión $\{M_n\}$ de puntos del conjunto $\{M\}$, para los cuales $f(M_n) > n$. De conformidad con el teorema de Bolzano—Weierstrass (véase p. 2, § 2), se puede seleccionar en $\{M_n\}$ la subsucesión convergente $\{M_{k_n}\}$, cuyo límite M pertenece, en virtud de la observación al teorema de Bolzano—Weierstrass, al conjunto $\{M\}$. Evidentemente, la sucesión $\{f(M_{k_n})\}$ es infinita. Por otra parte, siendo continua la función en el punto M, esta sucesión $\{f(M_{k_n})\}$ ha de converger hacia $f(M)$. La contradicción obtenida demuestra el teorema.

6°. UNA FUNCIÓN, CONTINUA SOBRE UN CONJUNTO ACOTADO CERRADO, ALCANZA SUS COTAS EXACTAS.

Teorema 5.7 (segundo teorema de Weierstrass). *Si la función $u = f(M)$ es continua sobre el conjunto acotado cerrado $\{M\}$, la misma alcanza en este conjunto sus cotas exactas superior e inferior.* La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 8.8 del t. 1 (segundo teorema de Weierstrass para la función de una sola variable).

7°. CONCEPTO DE CONTINUIDAD UNIFORME DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES. *La función $u = f(M)$ se llama uniformemente continua sobre el conjunto $\{M\}$ *) del espacio euclídeo E^m, si para todo número positivo ε puede indicarse número positivo δ, dependiente sólo de ε, tal que para cualesquiera dos puntos M' y M'' del conjunto $\{M\}$ que satisfacen la condición $\rho(M', M'') < \delta$ se cumple la inecuación $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon$.* Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema 5.8 (teorema de continuidad uniforme). *Una función continua en el conjunto acotado $\{M\}$ es uniformemente continua en*

*) Se supone en este caso que el conjunto $\{M\}$ es denso en sí, es decir, en cualquier ε-entorno de cada punto M de dicho conjunto hay puntos del conjunto $\{M\}$ distintos de M.

este conjunto. La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 1.2 y se obtiene de esta última sustituyendo el término «segmento $[a, b]$» por el término «conjunto $\{M\}$», la letra x, por la letra M, y las expresiones de tipo $|x'' - x'|$, por el símbolo $\rho(M', M'')$.

OBSERVACIÓN. Llamaremos *diámetro* del conjunto acotado $\{M\}$ la cota superior exacta de los números $\rho(M', M'')$, donde M' y M'' son toda clase de puntos del conjunto $\{M\}$. Haciendo uso del concepto de diámetro de un conjunto, daremos a conocer la siguiente propiedad de las funciones continuas sobre los conjuntos acotados cerrados. *Supongamos que la función $u = f(M)$ es continua sobre el conjunto acotado cerrado $\{M\}$. Entonces, para cualquier número positivo ε puede indicarse un $\delta > 0$ tal que sobre todo subconjunto cerrado $\{\overline{M}\}$, que pertenece al conjunto $\{M\}$ y cuyo diámetro es inferior a δ, la oscilación ω* *) *de la función $f(M)$ es inferior a ε.* La demostración de esta propiedad es análoga a la del corolario del teorema 1.2.

§ 4. Derivadas y diferenciales de las funciones de varias variables

1. Derivadas parciales de una función de varias variables. Sea $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un punto interior del dominio de definición de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Examinemos en el punto fijo dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ la razón entre el incremento parcial $\Delta_{x_k}u$ (véase p. 1, § 3, fórmulas (5.8) y (5.9)) y el incremento correspondiente Δx_k del argumento x_k:

$$\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\Delta x_k}. \tag{5.12}$$

La razón (5.12) es una función de Δx_k, definida para todos los valores de Δx_k, distintos de cero, para los cuales el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)$ pertenece al dominio de definición de la función u.

Definición. *Si existe un límite de la razón* (5.12) *entre el incremento parcial $\Delta_{x_k}u$ de la función en el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ y el incremento correspondiente Δx_k del argumento x_k para $\Delta x_k \to 0$, este límite se denomina derivada parcial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en el punto M respecto del argumento x_k y se denota con uno de los símbolos:*

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad u'_{x_k}, \quad f'_{x_k}.$$

*) Llámase oscilación ω de la función $f(M)$ sobre el conjunto $\{M\}$ a la diferencia entre las cotas exactas superior e inferior de la función $f(M)$ en dicho conjunto.

De este modo,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}. \tag{5.13}$$

Advirtamos que la derivada parcial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ respecto del argumento x_k es una derivada ordinaria de la función de una sola variable x_k, siendo fijos los valores de las demás variables. Por eso, el cálculo de las derivadas parciales se realiza de acuerdo con las reglas usuales para el cálculo de las derivadas de las funciones de una sola variable.

EJEMPLOS.

1°. $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$.

2°. $u = xe^{yz} + \ln(x-y+z)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{yz} + \frac{1}{x-y+z}$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = xze^{yz} - \frac{1}{x-y+z}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{yz} + \frac{1}{x-y+z}$.

3°. $u = \operatorname{tg}\sqrt{x^2-yz}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-yz}\cos^2\sqrt{x^2-yz}}$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{2\sqrt{x^2-yz}\cos^2\sqrt{x^2-yz}}$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{2\sqrt{x^2-yz}\cos^2\sqrt{x^2-yz}}$.

OBSERVACIÓN 1. Del que una función tiene en el punto dado todas las derivadas parciales no proviene, como regla, la continuidad de la misma en dicho punto. Ya nos hemos convencido de que la función

$$u = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{para } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{para } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

no es continua en el punto $O(0, 0)$ (véase el ejemplo 1°, p. 1, § 3). No obstante, en este punto la función mencionada tiene derivadas parciales respecto de x e y. Esto se deduce de que $f(x, 0) \equiv 0$ y $f(0, y) \equiv 0$, y por eso

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\,0)} = 0 \text{ y } \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,\,0)} = 0.$$

OBSERVACIÓN 2. Hemos definido el concepto de derivadas parciales para los puntos interiores del dominio de representación de una función. Para los puntos de frontera del dominio de representación la definición de derivadas parciales aducida, en el caso general, no

es apta. En particular, esto se debe a que en los puntos de frontera del dominio de representación de la función no siempre pueden calcularse los incrementos parciales de dicha función (esto se refiere, por ejemplo, al punto de frontera M_0 del dominio mostrado en la fig. 5.2). Por eso, las derivadas parciales en los puntos de frontera del dominio de representación de la función se hallan, corrientemente, como valores límites de estas derivadas.

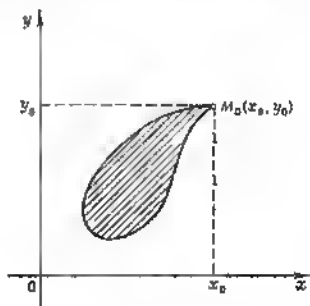


Fig. 5.2

2. Concepto de diferenciabilidad de una función de varias variables. Recordemos que llámase incremento (o incremento total) de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, correspondiente a los incrementos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ de los argumentos, a la expresión

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, + \ldots, x_m + \Delta x_m) - \\ - f(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Definición. *La función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se llama diferenciable en el punto dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ si su incremento total en dicho punto puede ser representado en la forma*

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m + \\ + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m. \quad (5.14)$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son unos números independientes de $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, unas funciones infinitésimas para $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$, iguales a cero cuando $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_m = 0$. La relación (5.14) se denomina *condición de diferenciabilidad* de la función en el punto dado M. La condición (5.14) de diferenciabilidad de una función puede escribirse también en una forma diferente. Para mostrarlo, examinemos la función $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + x_m^2}$ [1]), infinitésima para $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$, y advirtamos que dicha función se anula sólo cuando $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_m = 0$. Cerciorémonos de que la suma $\alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m$ que forma parte del segundo miembro de la relación (5.14), es una función

[1]) Geométricamente, esta función es la distancia entre los puntos $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ y $M'(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m)$

infinitésima de orden más elevado en comparación con ρ. Dicho de otro modo, cerciorémonos de que esta suma es la expresión $o(\rho)$. En efecto, cuando $\rho \neq 0$, se cumple

$\frac{|\Delta x_i|}{\rho} \leqslant 1$ y por eso

$$|\alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ |\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + |\alpha_2| \frac{|\Delta x_2|}{\rho} + \ldots + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho} \right\} \rho \leqslant$$
$$\leqslant \{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_m|\} \rho = o(\rho).$$

De este modo, la condición (5.14) de diferenciabilidad de una función puede ser escrita en la forma siguiente

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m + o(\rho). \qquad (5.15)$$

La magnitud $o(\rho)$ se considera en este caso igual a cero cuando $\rho = 0$.

Con el fin de demostrar que la condición (5.15) es equivalente a la (5.14), hace falta convencerse de que de la representación (5.15) se deduce, a su vez, la representación (5.14). Para ello representemos $o(\rho)$ en la forma

$$o(\rho) = \frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\rho^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_m^2}{\rho} =$$
$$= \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_1}{\rho}\right] \Delta x_1 + \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_2}{\rho}\right] \Delta x_2 + \ldots + \left[\frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\Delta x_m}{\rho}\right] \Delta x_m,$$

considerando que no todos los $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ son nulos *). Suponiendo $\frac{o(\rho)}{\rho} = \frac{\Delta x_i}{\rho} = \alpha_i$ y considerando que α_i es una función infinitésima para $\rho \to 0$ y, por lo tanto también para $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$, llegamos a la representación (5.14).

Así, pues, la condición de diferenciabilidad de una función puede escribirse tanto en la forma (5.14), como en la (5.15).

Si por lo menos uno de los números $A_1, A_2, \ldots, A_m$ es distinto de cero, la suma $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m$ es la parte *principal, lineal respecto de los incrementos de los argumentos*, del incremento de la función diferenciable. Advirtamos que al definir el concepto de función diferenciable, no se excluía la posibilidad de anularse todos los números $A_1, A_2, \ldots, A_m$, por lo cual, si incremento Δu de la función puede representarse en la forma (5.14) o (5.15) para $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = 0$, la función es diferenciable en el punto dado.

Resulta válido el teorema siguiente.

Teorema 5.9. *Si la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es diferenciable en el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, en el mismo existen derivadas*

*) Si todos los Δx_i son nulos, lo serán también todos los términos en los segundos miembros de las fórmulas (5.14) y (5.15).

parciales respecto de todos los argumentos, con la particularidad de que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$, *donde* A_i *se determinan de la condición* (5.14) *o* (5.15) *de diferenciabilidad de una función.*

DEMOSTRACION. De la condición (5.14) de diferenciabilidad de la función en el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se deduce que su incremento parcial $\Delta_{x_i} u$ en este punto es igual a $\Delta_{x_i} u = A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i$. De aquí se desprende que $\frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i$ y por eso, dado que $\alpha_i \to 0$ cuando $\Delta x_i \to 0$, tenemos $\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$.

Corolario 1. La condición (5.15) *de diferenciabilidad de una función en el punto dado M puede escribirse también en la forma siguiente*:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho)\ ^{*)}. \qquad (5.16)$$

Corolario 2. Si la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *es diferenciable en el punto* $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *la representación de su incremento* Δu *en la forma* (5.14) *o* (5.15) *es única*. En efecto, los coeficientes A_i de estas representaciones son iguales a las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *en el punto dado M* y, por eso, se definen de un modo único.

Cerciorémonos de la validez de la siguiente propiedad importante de la función diferenciable.

Si la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *es diferenciable en el punto* $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *es también continua en este punto*. En efecto, de la condición (5.14) de diferenciabilidad de una función en un punto se deduce que $\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0$, lo que precisamente quiere decir que la función es continua en el punto M (véase p. 1, § 3, fórmula (5.7)).

Para el caso de la función $u = f(x, y)$ de dos variables la condición de diferenciabilidad puede ilustrarse geométricamente. Introduzcamos el concepto de plano tangente a una superficie en el punto N_0. *El plano* π *que pasa por el punto* N_0 *de la superficie se denomina plano tangente en este punto si el ángulo formado por dicho plano y la secante que pasa por el punto* N_0 *y cualquier punto* N_1 *de la superficie tiende a cero cuando el punto* N_1 *tiende a* N_0 (fig. 5.3).

Si en el punto N_0 existe un plano tangente, es evidente que una tangente en el punto N_0 a cualquier curva que está dispuesta en la superficie y que pasa por N_0 se dispone en el plano mencionado.

---

*) Aquí, todas las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ se toman en el punto dado M.

Cerciorémonos de que de la condición de diferenciabilidad de la función $u = f(x, y)$ en el punto dado $M_0(x_0, y_0)$ se deduce la existencia de un plano tangente a la gráfica S de dicha función en el punto $N_0(x_0, y_0, z_0)$. Pongamos $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta u = u - u_0$, donde $u_0 = f(x_0, y_0)$, $u = f(x, y)$. Obviamente, la

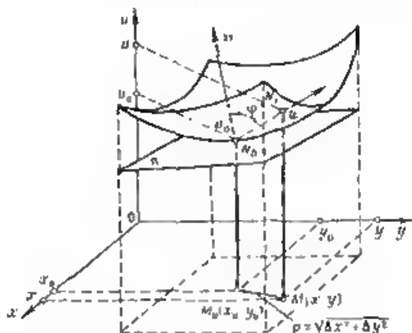


Fig. 5.3

condición (5.14) de diferenciabilidad en el caso que se examina puede ser escrita del modo siguiente:

$$u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho),$$

donde A y B son unas constantes iguales a las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ en el punto M_0, mientras que α y β son funciones infinitésimas para $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$; $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Veamos la ecuación siguiente:

$$U - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Por el curso de geometría analítica sabemos que esta ecuación define en un sistema cartesiano de coordenadas (x, y, U) un plano π que pasa por el punto $N_0(x_0, y_0, u_0)$ y que cuenta con un vector normal $\mathbf{n} = \{A, B, -1\}$ *).

Demostremos que este plano π es tangente en el punto N_0 a la superficie S. Con este fin basta convencerse de que: 1) el plano π pasa por el punto N_0 de la superficie S y 2) el ángulo φ formado por la normal $\mathbf{n}$ a dicho plano y cualquier secante N_0N_1 tiende a $\pi/2$,

*) Llámase vector normal de un plano a cualquier vector no nulo $\mathbf{n}$, perpendicular a dicho plano.

cuando el punto N_1 de la superficie S tiende al punto N_0. La afirmación 1) es evidente. Pasemos a la demostración de la afirmación 2). Calculemos el coseno del ángulo φ utilizando la fórmula conocida para el coseno del ángulo entre dos vectores. Por cuanto las coordenadas del vector **n** son iguales a A, B, -1, mientras que las coordenadas del vector $\overline{N_0N_1}$ de la secante son iguales a $x - x_0$, $y - y_0$, $u - u_0$ (véase fig. 5.3), resulta que

$$\cos\varphi = \frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)-(u-u_0)}{\sqrt{A^2+B^2+1}\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(u-u_0)^2}}.$$

De la condición de diferenciabilidad de la función $u = f(x, y)$ se deduce que

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - (u - u_0) = o(\rho).$$

Por eso

$$|\cos\varphi| \leqslant \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{|o(\rho)|}{\rho}.$$

De esta fórmula proviene que $\lim\limits_{\rho\to 0} \cos\varphi = 0$, es decir, $\lim\limits_{\rho\to 0} \varphi = \pi/2$. La afirmación 2) está demostrada.

De este modo, la diferenciabilidad de la función $u = f(x, y)$ en el punto $M_0(x_0, y_0)$ desde el punto de vista geométrico significa la existencia de un plano tangente a la gráfica de la función $u = f(x, y)$ en el punto $N_0(x_0, y_0, u_0)$.

Por cuanto los coeficientes A y B son iguales a las derivadas parciales respectivas calculadas en el punto $M_0(x_0, y_0)$, la ecuación del plano tangente puede ser escrita en la forma

$$U - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0). \tag{5.17}$$

El vector normal $\mathbf{n} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\right\}$ del plano tangente suele llamarse *normal* a la superficie $u = f(x, y)$ en el punto $N_0(x_0, y_0, u_0)$.

Aclaremos las condiciones suficientes de diferenciabilidad de una función de varias variables.

Teorema 5.10. *Si la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tiene derivadas parciales respecto de todos los argumentos en cierto entorno del punto $M_0(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_m)$, con la particularidad de que todas estas derivadas parciales son continuas en el propio punto M_0, la citada función será diferenciable en el punto M_0.*

DEMOSTRACIÓN. Con el fin de reducir la anotación, realicemos la demostración para la función de dos variables $u = f(x, y)$. Así, pues, supongamos que ambas derivadas parciales f'_x y f'_y existen en el entorno del punto $M_0(x_0, y_0)$ y son continuas en el mismo. Atri-

buyamos a los argumentos x e y unos incrementos Δx y Δy tan pequeños que el punto $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ no salga de los márgenes del citado entorno del punto M_0. El incremento total $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ puede escribirse en la forma

$$\Delta u = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

La expresión $[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)]$ puede considerarse como incremento de la función $f(x, y_0 + \Delta y)$ de una sola variable x sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Por cuanto la función $u = f(x, y)$ tiene derivadas parciales, la citada función $f(x, y_0 + \Delta y)$ es diferenciable y su derivada respecto de x es una derivada parcial f'_x. Aplicando al incremento mencionado la fórmula de Lagrange, hallaremos tal θ_1 del intervalo $0 < \theta_1 < 1$ que

$$[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\,\Delta x.$$

Razonando análogamente, obtenemos que para cierto θ_2 del intervalo $0 < \theta_2 < 1$

$$[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\,\Delta y.$$

Por cuanto las derivadas f'_x y f'_y son continuas en el punto M_0, resulta que

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

donde α y β son funciones infinitésimas para $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De aquí, considerando las expresiones aducidas para

$$[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] \text{ y } [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

y la expresión para Δu, hallaremos

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

Por consiguiente, la función $u = f(x, y)$ es diferenciable en el punto M_0. Cuando se trata de una función de m variables $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, los razonamientos son análogos, mas el incremento total Δu de esta función debe representarse en la forma

$$\Delta u = f(\overset{\circ}{x}_1 + \Delta x_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m + \Delta x_m) - f(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) = \sum_{k=1}^{m} [f(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_{k-1}, \overset{\circ}{x}_k + \Delta x_k, x_{k+1} + \Delta x_{k+1}, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_{k-1}, \overset{\circ}{x}_k, \overset{\circ}{x}_{k+1} + \Delta x_{k+1}, \ldots, \overset{\circ}{x}_m + \Delta x_m)].$$

El teorema está demostrado.

3. Concepto de diferencial de una función de varias variables. ***Definición.*** *Llámase diferencial du de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ diferenciable en el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a la parte principal, lineal respecto de los incrementos de los argumentos, del incremento de dicha función en el punto M. Si todos los coeficientes A_i en la representación* (5.14) *del incremento de la función diferenciable son nulos, la diferencial du de la función en el punto M se considera igual a cero.*

De este modo, se denomina diferencial du de la función $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ en el punto M la expresión

$$du = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m. \tag{5.18}$$

Recurriendo al teorema 5.9, podemos escribir, evidentemente, la expresión (5.18) para la diferencial du del modo siguiente:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m. \tag{5.19}$$

Introduzcamos el concepto de *diferencial dx_i de la variable independiente x_i*. Por diferencial dx_i de la variable independiente x_i puede entenderse un número cualquiera que no depende de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Pongámonos de acuerdo que en adelante este número se tome igual al incremento Δx_i de la variable independiente x_i. Este convenio nos permite reescribir la fórmula (5.19) en la forma

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m. \tag{5.20}$$

Subrayamos que la fórmula (14.20) fue establecida sólo para el caso en que los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son variables independientes. No obstante, más abajo (en el p. 5 de este párrafo) demostraremos que la fórmula (5.20) sigue válida también para el caso en que los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ no son variables independientes, sino que son funciones diferenciables de ciertas variables nuevas.

4. Diferenciación de una función compuesta. Aquí estudiaremos el problema de diferenciación de una función compuesta de la forma $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, donde

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k). \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

Demostremos que en unas condiciones determinadas esta función compuesta es función diferenciable de sus argumentos $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Las derivadas parciales de la citada función compuesta respecto de los argumentos $t_1, t_2, \ldots, t_k$ se expresan en términos de las deriva-

das parciales de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ y en términos de las derivadas parciales de la función (5.21) según las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\
\frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial u}{\partial t_k} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_k}.
\end{aligned}\right\} \quad (5.22)$$

Demostremos el siguiente teorema *fundamental.*

Teorema 5.11. *Supongamos que las funciones* (5.21) *son diferenciables en cierto punto* $M(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$ *y la función* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *lo es en el punto correspondiente* $N(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, *donde* $\overset{\circ}{x}_i = \varphi_i(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Entonces, la función compuesta* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *donde* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *se definen mediante las relaciones* (5.21), *es diferenciable en el punto* M. *En este caso las derivados parciales de esta función compuesta en el punto* M *se definen mediante las fórmulas* (14.22), *en las cuales todas las derivadas parciales* $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ *se toman en el punto* N, *y todas las derivadas parciales* $\frac{\partial x_i}{\partial t_1}$ *de la función* (5.21) *respecto de los argumentos* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *se toman en el punto* M.

DEMOSTRACIÓN. A los argumentos $t_1, t_2, \ldots, t_k$ en el punto $M(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$ les daremos arbitrariamente los incrementos $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_k$, no simultáneamente nulos. A estos incrementos les corresponden los incrementos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ de las funciones (5.21) en el punto M. A los incrementos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ les corresponde, a su vez, el incremento Δu de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en el punto N. Por cuanto la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se supone diferenciable en el punto N, el citado incremento Δu de la misma puede ser escrito en la forma

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \\ + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m, \quad (5.23)$$

donde las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ se toman en el punto N, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son funciones infinitésimas para $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$, que son iguales a cero cuando $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_m = 0$. Recalquemos que en la relación (14.23) $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ son los incrementos de las funciones

(14.21), que corresponden a los incrementos elegidos Δt_1, Δt_2, ..., Δt_k de los argumentos de estas funciones. Por ser las funciones (5.21) diferenciables en el punto $M(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$, los incrementos mencionados Δx_i pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial x_i}{\partial t_2}\Delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial t_k}\Delta t_k + o(\rho), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.24}$$

donde las derivadas parciales $\frac{\partial x_i}{\partial t_1}, \frac{\partial x_i}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ se toman en el punto M, y $\rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2 + \ldots + (\Delta t_k)^2}$.

Hemos de convencernos de que al introducir la expresión (5.24) en el segundo miembro de (5.23), el incremento Δu puede ser reducido a la forma

$$\Delta u = A_1\Delta t_1 + A_2\Delta t_2 + \ldots + A_k\Delta t_k + o(\rho), \tag{5.25}$$

donde

$$A_i = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{5.26}$$

Con esto el teorema quedará demostrado, pues la fórmula (5.25) establece el hecho de que una función compuesta es diferenciable y la expresión (5.26) es una derivada parcial de la citada función compuesta (véase el teorema 5.9).

Al introducir en el segundo miembro de (5.23) las expresiones (5.24), obtenemos, además del grupo de sumandos $A_1\Delta t_1 + A_2\Delta t_2 + \ldots + A_k\Delta t_k$, otros grupos de sumandos. Nos hace falta convencernos de que todos los demás grupos de sumandos representan la magnitud $o(\rho)$. Esto se deduce de los razonamientos siguientes:

1°. *Todas las derivadas parciales* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *en la fórmula* (5.23) *se toman en el punto* N, *es decir, son unas constantes que, siendo multiplicadas por* $o(\rho)$, *dan de nuevo la magnitud* $o(\rho)$.

2°. *Todos los* Δx_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *satisfacen la inecuación* $|\Delta x_i| \leqslant \text{const}\,\rho$. *Esto se deduce inmediatamente de las fórmulas* (5.24).

3°. *Todas las* α_i *de la fórmula* (5.23) *son funciones infinitésimas para* $\rho \to 0$. En efecto, todas las α_i son infinitamente pequeñas para $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, . . ., $\Delta x_m \to 0$. Pero, todas las funciones (5.21) son diferenciables y, por tanto, continuas en el punto M, razón por la cual Δx_1, Δx_2, . . ., Δx_m tienden a cero cuando $\rho \to 0$.

4°. *Todo producto* $\alpha_i\,\Delta x_i$ *representa la magnitud* $o(\rho)$. Esto se desprende directamente de los pp. 2° y 3°. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Analicemos un caso particular, de importancia, cuando las funciones (5.21) dependen de un argumento t. En este caso tenemos una función de una sola variable t: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, donde $x_i = \varphi_i(t)$. La derivada $\frac{du}{dt}$ de esta función compuesta se define mediante la fórmula siguiente

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt}. \qquad (5.27)$$

Apliquemos la fórmula (5.27) para demostrar *el teorema de Euler de las funciones homogéneas.*

La función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ definida sobre el conjunto $\{M\}$ se denomina función homogénea de grado p en este conjunto, si para todo punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ del conjunto $\{M\}$ y para todo número t, para el cual un punto $N(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)$ pertenece al conjunto $\{M\}$, *se verifica la igualdad*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^p f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \qquad (5.28)$$

Teorema 5.12 ***(teorema de Euler sobre las funciones homogéneas).*** *Si $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es en cierto dominio $\{M\}$ una función homogénea diferenciable de grado p, en cada punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ del dominio $\{M\}$ se verifica la igualdad*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}x_m = pu. \qquad (5.29)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ un punto arbitrario del dominio $\{M\}$. Estudiemos una función compuesta $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, donde $x_i = t\overset{\circ}{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, es decir, una función $u = f(t\overset{\circ}{x}_1, t\overset{\circ}{x}_2, \ldots, t\overset{\circ}{x}_m)$. Por cuanto las funciones $x_i = t\overset{\circ}{x}_i$ son diferenciables para $t = 1$ y la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ lo es en el punto correspondiente M_0, entonces, de acuerdo con el teorema 5.11 y con la observación a este teorema, podemos calcular la derivada $\frac{du}{dt}$ de esta función compuesta en el punto $t = 1$ según la fórmula (5.27). Puesto que $\frac{dx_i}{dt} = \overset{\circ}{x}_i$, se tiene

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\overset{\circ}{x}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\overset{\circ}{x}_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\overset{\circ}{x}_m, \qquad (5.30)$$

donde las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ se toman en el punto M_0. Por otra parte en virtud de (5.28), la función compuesta sujeta a la consideración puede ser representada en la forma

$$u = f(t\overset{\circ}{x}_1, t\overset{\circ}{x}_2, \ldots, t\overset{\circ}{x}_m) = t^p f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, x_m). \qquad (5.31)$$

De (5.31) se desprende que $\frac{du}{dt} = pt^{p-1}f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, es decir,

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = pf(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) = pu. \qquad (5.32)$$

Cotejando (5.30) y (5.32), obtendremos la relación (5.29) para el punto M_0. Por cuanto el punto M_0 es arbitrario en el dominio $\{M\}$, el teorema queda demostrado.

5. Forma invariante de la primera diferencial. En el p. 3 se ha introducido el concepto de primera diferencial du de una función de varias variables y se ha establecido que cuando los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son variables independientes, la diferencial du puede ser representada en la forma

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m. \qquad (5.20)$$

En este punto se demostrará que la fórmula (5.20) es universal y es válida también para el caso en que los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son de por sí funciones diferenciables de las nuevas variables $t_1, t_2, \ldots, t_k$. La propiedad citada de la primera diferencial se suele denominar propiedad *de invariación de su forma*.

Supongamos que los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ son funciones diferenciables $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ en un punto $A(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$, y la propia función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ lo es en un punto $B(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, donde $\overset{\circ}{x}_i = \varphi_i(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$. En tal caso podemos considerar u como una función compuesta de los argumentos $t_1, t_2, \ldots, t_k$, la cual es, en virtud del teorema **5.11**, diferenciable en el punto A. Por eso, la diferencial du de esta función compuesta puede ser representada en la forma

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k, \qquad (5.33)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ se definen a partir de las relaciones (5.22). Introduciendo $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ de (5.22) en (5.33) y reuniendo los coeficientes de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, obtendremos

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k\right) + \\ \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k\right).$$

Nos queda señalar que en la última relación el coeficiente de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ es igual a la diferencial dx_i de la función $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$.

Obtendremos para la diferencial du de la función compuesta la fórmula (5.20), en la cual las diferenciales dx_i serán diferenciales de las funciones $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. La invariación de la forma de la primera diferencial queda establecida.

La propiedad de invariación de la forma de la primera diferencial permite establecer las siguientes *reglas de diferenciación*. Sean u y v unas funciones diferenciables de ciertas variables. Entonces

$$d(cu) = c\,du \quad (c = \text{const}),$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = u\,dv + v\,du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

(En la última de las fórmulas escritas v no se anula.)

Demostremos, por ejemplo, la validez de la tercera de las fórmulas citadas. Veamos una función $w = uv$ de dos variables u y v. La diferencial de esta función dw es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv.$$

Por cuanto $\frac{\partial w}{\partial u} = v$ y $\frac{\partial w}{\partial v} = u$, tenemos $dw = u\,dv + v\,du$. Por ser invariante la forma de la primera diferencial, la expresión $u\,dv + v\,du$ expresa la diferencial de la función uv también en el caso en que u y v son de por sí funciones diferenciables de ciertas variables.

6. **Derivada direccional. Gradiente.** Supongamos que una función $u = f(x, y, z)$ de tres variables x, y y z viene dada en cierto entorno del punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Examinemos una dirección definida por el vector unidad **a**, cuyas coordenadas son $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *). Tracemos por el punto M_0 el eje **l**, cuyo sentido coincide con el del vector **a**, elijamos en dicho eje un punto arbitrario $M(x, y, z)$ y denotemos con l la magnitud del segmento orientado M_0M del mencionado eje **). Por el curso de geometría analítica se conoce que las coordenadas x, y, z del punto M se definen mediante las igualdades

$$x = x_0 + l\cos\alpha, \quad y = y_0 + l\cos\beta, \quad z = z_0 + l\cos\gamma. \qquad (5.34)$$

En el eje **l** la función $u = f(x, y, z)$ es, evidentemente, una función compuesta de una sola variable l. *Si esta función tiene en el punto $l = 0$ una derivada respecto de la variable l, la citada derivada lleva el nombre de derivada según la dirección* **l** *de la función $u = f(x, y, z)$ en el punto M_0 y se designa por el símbolo* $\frac{\partial u}{\partial l}$. De con-

*) Por el curso de geometría analítica se sabe que si el vector unidad **a** forma con los ejes coordenados los ángulos α, β, γ, las coordenadas de este vector son iguales a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

) Llámase magnitud l del segmento orientado M_0M del eje **l a un número, igual a su longitud tomada con el signo más, si la dirección de este segmento coincide con la del eje **l**, y tomada con el signo menos, si la dirección de este segmento es opuesta a la del eje **l**.

formidad con la observación al teorema 5.11, si la función $u = f(x, y, z)$ es diferenciable en el punto M_0, la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ puede calcularse según la fórmula (5.27), en la que el argumento t ha de sustituirse por l. De este modo,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dl}.$$

Por cuanto $\frac{dx}{dl} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dl} = \cos\beta$, $\frac{dz}{dl} = \cos\gamma$, de la última fórmula hallamos

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{5.35}$$

Introduzcamos el concepto de *gradiente* de la función $u = f(x, y, z)$ diferenciable en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Llámase gradiente de la función $u = f(x, y, z)$ *en el punto* M_0 *a un vector que se denota con el símbolo* grad u *y que tiene coordenadas iguales, respectivamente, a las derivadas* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, *tomadas en el punto* M_0. De este modo,

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}. \tag{5.36}$$

Utilizando el concepto de gradiente de una función y teniendo presente que el vector **a** que define la dirección del eje **l** tiene por coordenadas $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, representemos la expresión (5.35) para la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ según la dirección **l** en forma del producto escalar de los vectores grad u y **a**:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{a} \operatorname{grad} u \text{ *)}. \tag{5.37}$$

Mostremos que *el gradiente de la función* $u = f(x, y, z)$ *en el punto* M_0 *caracteriza el sentido y la magnitud de crecimiento máximo de esta función en el punto* M_0. A saber: cerciorémonos de que la derivada de la función u en el punto M_0 según la dirección definida por el gradiente de dicha función en el punto mencionado tiene valor máximo en comparación con la derivada según cualquier otra dirección en el punto M_0, y el valor de la citada derivada es igual a $|\operatorname{grad} u|$, es decir, a la longitud del vector grad u. Reescribamos la fórmula (5.37) en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\mathbf{a}|\,|\operatorname{grad} u| \cos\varphi,$$

*) Recordemos que el producto escalar de dos vectores, definido como producto de módulos (longitudes) de los vectores por el coseno del ángulo comprendido entre ellos (cuando los vectores vienen dados por las coordenadas) es igual a la suma de productos de las coordenadas homónimas de estos vectores.

donde φ es el ángulo entre los vectores **a** y grad u. Por cuanto

$$|\mathbf{a}| = 1, \text{ tenemos } \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cos\varphi.$$

De la última fórmula se deduce que la derivada direccional tendrá el valor máximo $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\text{máx}}$ para $\cos\varphi = 1$, es decir, cuando la dirección del vector **a** coincida con la del grad u, con la particularidad de que $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\text{máx}} = |\text{grad } u|$.

Con el fin de aclarar el significado geométrico del vector grad u introduzcamos el concepto de *superficie de nivel* de una función $u = f(x, y, z)$.

Llamemos superficie de nivel de la función $u = f(x, y, z)$ a toda superficie, sobre la cual la función $u = f(x, y, z)$ conserva constante su valor: $f(x, y, z) = c = \text{const}$.

No es difícil convencerse de que el vector grad u en un punto dado $M_0(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal con relación a una superficie de nivel de la función $u = f(x, y, z)$, que pasa por el punto dado M_0.

OBSERVACIÓN. En caso de una función $u = f(x, y)$ de dos variables x e y, el vector unidad **a** que define la dirección en el punto M_0 tiene por sus coordenadas $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$. Por eso, en este caso la fórmula (5.35) tendrá la forma

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha.$$

Notemos que en caso de una función de dos variables el gradiente de la función diferenciable $u(x, y)$ se define como un vector que tiene por coordenadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$. La fórmula (5.37) será, evidentemente, válida también en caso de dos variables. Para una función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, la derivada direccional y el gradiente se determinan de un modo análogo. A saber: la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ en el punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ según la dirección **l**, que se define mediante el vector unidad $\mathbf{a} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m\}$ *) se define como derivada respecto de l de la función compuesta $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, donde $x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + l\cos\alpha_1$, $x_2 = \overset{\circ}{x}_2 + l\cos\alpha_2, \ldots, x_m = \overset{\circ}{x}_m + l\cos\alpha_m$. Si $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es una función diferenciable, para la derivada direccional tiene lugar la fórmula siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\cos\alpha_m.$$

*) En geometría analítica del espacio euclídeo m-dimensional el vector unidad **a** se define como vector con las coordenadas $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m$, donde $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_m = 1$.

Llámase gradiente de una función en el punto dado $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ a un vector que se denota con el símbolo grad u y que tiene por coordenadas $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$, con la particularidad de que las derivadas mencionadas se toman en el punto M_0. Para la derivada direccional de una función diferenciable $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ resulta válida la fórmula (5.37).

§ 5. Derivadas parciales y diferenciales de orden superior

1. Derivadas parciales de orden superior. Supongamos que una derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ respecto del argumento x_i de una función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, definida en un dominio determinado $\{M\}$, existe en cada punto del dominio $\{M\}$. En este caso la citada derivada parcial es una función de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, también definida en el dominio $\{M\}$. Puede suceder que esta función $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ tenga la derivada parcial respecto del argumento x_k en cierto punto M del dominio $\{M\}$. Entonces, dicha derivada parcial respecto del argumento x_k se denomina segunda derivada parcial o derivada parcial de segundo orden de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en el punto M, primero respecto del argumento x_i, luego, respecto del argumento x_k y se denota con uno de los siguientes símbolos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_i}, \quad f^{(2)}_{x_i x_k}, \quad u^{(2)}_{x_i x_k}.$$

Además, si $i \neq k$, la derivada parcial $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_i}$ se llama parcial *mixta* de segundo orden. Introducido el concepto de segunda derivada parcial, puede introducirse sucesivamente la noción de tercera derivada parcial, luego, de cuarta derivada, etc. Si suponemos que ya tenemos introducida la noción de $(n-1)$-ésima derivada parcial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ respecto de los argumentos $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}$ (algunos o todos los números de la cual pueden coincidir) y que esta $(n-1)$-ésima derivada tiene en el punto M derivada parcial respecto del argumento x_{i_n}, la citada derivada parcial recibe el nombre de n-ésima derivada parcial (o derivada parcial de n-ésimo orden) de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en el punto M respecto de los argumentos $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$. De este modo introducimos el concepto de n-ésima derivada parcial *por el método inductivo*, pasando de la primera derivada parcial a las posteriores. La relación que define la n-ésima derivada parcial respecto de

los argumentos $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$, tiene la forma

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right).$$

Si no todos los índices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ coinciden entre sí, la derivada parcial $\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$ se llama derivada parcial *mixta* (*cruzada*) de n-ésimo orden. Por cuanto la derivada parcial respecto del argumento x_i se define como derivada ordinaria de una función de variable única x_i, siendo fijos los valores de las demás variables, la metodología de cálculo de las derivadas parciales de orden superior exige que se sepa calcular sólo las derivadas ordinarias de primer orden. A título de ejemplo, calculemos las derivadas parciales de segundo orden de una función $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

En el ejemplo examinado las derivadas parciales mixtas $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ son iguales. Por regla general, los valores de las derivadas mixtas dependen del orden en que se realiza la diferenciación sucesiva. Cerciorémonos, por ejemplo, de que las derivadas parciales mixtas $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ de la función

$$u = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{para } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{para } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

existen en el punto (0, 0), pero no son iguales. En efecto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{para } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{para } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Por eso

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right|_{x=0,\, y=0} = \lim_{y \to 0} \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0,\, y=0} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0,\, y=0}}{y} = -1.$$

Al realizar cálculos análogos, obtendremos $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{x=0,\ y=0} = 1$. De este modo, en el punto (0, 0) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \neq \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$. Aclaremos las condiciones suficientes de independencia de los valores de las derivadas mixtas respecto del orden en que se efectúa la diferenciación sucesiva. Introduzcamos previamente el concepto de función de varias variables n veces diferenciable. *Una función* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *se denomina n veces diferenciable en un punto* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ *si todas las derivadas parciales de* $(n-1)$*-ésimo orden de esta función son funciones diferenciables en el punto* M_0. Hagamos resaltar la afirmación siguiente. *Para que una función* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *sea n veces diferenciable en un punto* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, *es suficiente que todas las derivadas parciales suyas de n-ésimo orden sean continuas en el punto* M_0. La validez de esta afirmación se deduce de la definición de diferenciabilidad de una función y del teorema 5.10 de las condiciones suficientes de diferenciabilidad.

Teorema 5.13. *Sea* $u = f(x, y)$ *dos veces diferenciable en un punto* $M_0(x_0, y_0)$. *Entonces, en dicho punto las derivadas parciales* $f^{(2)}_{xy}$ *y* $f^{(2)}_{yx}$ *son iguales.*

DEMOSTRACION Por cuanto la función $u = f(x, y)$ es dos veces diferenciable en el punto $M_0(x_0, y_0)$, las derivadas parciales f'_x y f'_y están definidas en cierto entorno del punto M_0 y son funciones diferenciables en este punto. Veamos la expresión

$$\Phi = f(x_0 + h,\ y_0 + h) - f(x_0 + h,\ y_0) - \\ - f(x_0,\ y_0 + h) + f(x_0,\ y_0), \qquad (5.38)$$

donde h es un número cualquiera tan pequeño que el punto $M(x_0 + h,\ y_0 + h)$ se encuentra en el entorno mencionado del punto M_0. La expresión Φ puede considerarse como el incremento $\Delta\varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$ de la función $\varphi(x) = f(x,\ y_0 + h) - f(x,\ y_0)$, de una variable x, que es diferenciable sobre el segmento $[x_0,\ x_0 + h]$. Por eso, de acuerdo con la fórmula de Lagrange, al designar con θ un número del intervalo $0 < \theta < 1$, podemos escribir

$$\Phi = \Delta\varphi = \varphi'(x_0 + \theta h)\,h = [f'_x(x_0 + \theta h),\ y_0 + h) - \\ - f'_x(x_0 + \theta h,\ y_0)]\,h = \{[f'_x(x_0 + \theta h,\ y_0 + h) - \\ - f'_x(x_0,\ y_0)] - [f'_x(x_0 + \theta h,\ y_0) - f'_x(x_0,\ y_0)]\}\,h. \qquad (5.39)$$

Por cuanto la derivada parcial f'_x es diferenciable en el punto M_0, resulta que

$$[f'_x(x_0 + \theta h,\ y_0 + h) - f'_x(x_0,\ y_0)] = \\ = f^{(2)}_{xx}(x_0,\ y_0)\,\theta h + f^{2}_{xy}(x_0,\ y_0)\,h + \alpha_1\theta h + \beta_1 h,$$

$$[f'_x(x_0 + \theta h,\ y_0) - f'_x(x_0,\ y_0)] = f^{2}_{xx}\,x_0,\ y_0)\,\theta h + \alpha_2\theta h,$$

donde α_1, β_1 y α_2 son funciones infinitésimas para $h \to 0$. Al introducir las expresiones halladas para $[f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)]$ y $[f'_x(x_0 + \theta h, y_0 - f'_x(x_0, y_0)]$ en la fórmula (14.39), obtendremos

$$\Phi = [f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0) + \alpha] h^2, \tag{5.40}$$

donde $\alpha = \alpha_1\theta + \beta_1 - \alpha_2\theta$ es una función infinitésima para $h \to 0$. Por otra parte, la expresión Φ que se define mediante (14.38), puede considerarse como el incremento $\Delta\psi = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0)$ de la función $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$, diferenciable en el segmento $[y_0, y_0 + h]$. Aplicando la fórmula de Lagrange y considerando la diferenciabilidad de la derivada parcial f'_y en el punto M_0, obtenemos por analogía con el caso antecedente la siguiente expresión para Φ:

$$\Phi = [f^{(2)}_{yx}(x_0, y_0) + \beta] h^2, \tag{5.41}$$

donde β es una función infinitésima para $h \to 0$. Al igualar los segundos miembros de las relaciones (5.40) y (5.41) y simplificando ambos miembros de la igualdad obtenida por h^2, hallaremos que $f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0) + \alpha = f^{(2)}_{yx}(x_0, y_0) + \beta$. Por cuanto α y β son funciones infinitésimas para $h \to 0$, de la última igualdad proviene que $f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0) = f^{(2)}_{yx}(x_0, y_0)$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. El teorema 5.13 afirma que en el punto dado $M_0(x_0, y_0)$ tiene lugar la igualdad $f^{(2)}_{xy} = f^{(2)}_{yx}$ si en este punto son diferenciables f'_x y f'_y. Dado que f'_x y f'_y son diferenciables en M_0 se deduce que *en este punto* existen *todas* las derivadas parciales de segundo orden. Sin embargo, la igualdad $f^{(2)}_{xy} = f^{(2)}_{yx}$ tiene lugar también si existen sólo las derivadas $f^{(2)}_{xy}$ y $f^{(2)}_{yx}$, mas con la exigencia adicional de continuidad de las citadas derivadas en el punto en consideración. Es válida la siguiente afirmación.

Supongamos que en cierto entorno del punto $M_0(x_0, y_0)$ la función $u = f(x, y)$ tiene derivadas parciales f'_x, f'_y, $f^{(2)}_{xy}$, $f^{(2)}_{yx}$. Además sean las derivadas $f^{(2)}_{xy}$ y $f^{(2)}_{yx}$ continuas en el punto M_0. En este caso $f^{(2)}_{xy} = f^{(2)}_{yx}$ en dicho punto.

Para demostrar la afirmación, hagamos uso de la expresión de Φ, definida mediante la relación (5.38). De (5.39) se deduce que Φ es la diferencia de valores de la función $f'_x(x, y)$ en los puntos $(x_0 + \theta h, y_0 + h)$ y $(x_0 + \theta h, y_0)$, multiplicada por h. Al aplicar a dicha diferencia la fórmula de Lagrange de incrementos finitos respecto de la variable y sobre el segmento $[y_0, y_0 + h]$, obtendremos

$$\Phi = f^{(2)}_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h) h^2, \text{ donde } 0 < \theta_1 < 1.$$

Por ser $f^{(2)}_{xy}$ continua en el punto $M_0(x_0, y_0)$, de la última igualdad obtenemos

$$\Phi = [f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h)] h^2,$$

donde $\alpha(h) \to 0$ cuando $h \to 0$.

Por otro lado, la misma magnitud Φ es la diferencia de valores de la función $f'_y(x, y)$ en los puntos $(x_0 + h, y_0 + \theta_2 h)$ y $(x_0, y_0 + \theta_2 h)$, multiplicada por

h. Al aplicar a dicha diferencia la fórmula de Lagrange de incrementos finitos respecto de la variable x sobre el segmento $[x_0, x_0 + h]$ y al tener en cuenta la continuidad de f''_{yx} en el punto $M_0(x_0, y_0)$, obtendremos

$$\Phi = [f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta(h)]\, h^2,$$

donde $\beta(h) \to 0$ cuando $h \to 0$.

Igualando entre sí las últimas dos expresiones para Φ y razonando del mismo modo que al final de la demostración del teorema 5.13, nos convenceremos de que la igualdad requerida

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

es válida.

Demostremos ahora el teorema de independencia del valor de cualquier n-ésima derivada parcial mixta respecto del orden en que se realiza la diferenciación sucesiva.

Teorema 5.14. *Supongamos que una función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es n veces diferenciable en el punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$. Entonces, en este punto el valor de cualquier n-ésima derivada parcial mixta no depende del orden en que se realiza la diferenciación sucesiva.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que basta probar la independencia del valor de cualquier n-ésima derivada mixta respecto del orden en que se realizan *dos* diferenciaciones *sucesivas*. Dicho de otro modo, es suficiente probar la igualdad

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \ldots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \ldots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \ldots \partial x_{i_1}}. \qquad (5.42)$$

Examinemos una función $\dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}$. Esta es una función dos veces diferenciable de las variables x_{i_k} y $x_{i_{k+1}}$. Por eso, en virtud del teorema 5.13,

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}.$$

De aquí precisamente se desprende la validez de la igualdad (5.42). El teorema está demostrado.

Advirtamos que en el caso de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, n veces diferenciable en el punto M_0, cualquier derivada parcial suya de n-ésimo orden puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son números enteros que satisfacen las condiciones $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$.

2. Diferenciales de orden superior. Para denotar las diferenciales de los argumentos de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ y la diferencial de la misma función más arriba hemos empleado los símbolos $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ y du, respectivamente.

Ahora hemos de utilizar también otros símbolos para denotar las diferenciales de los argumentos de la citada función y la diferencial

de la propia función. En particular, las diferenciales de los argumentos de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ y la diferencial de la propia función se denotarán con los símbolos $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_m$ y δu, respectivamente. Utilizando estas designaciones la expresión para la primera diferencial de dicha función (5.20), invariante por su forma (véase p. 5, § 4) se representa de la manera siguiente:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\delta x_m.$$

Volviendo a las designaciones anteriores, veamos la expresión (5.20) para la primera diferencial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ diferenciable en el punto dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m. \qquad (5.20)$$

Supongamos que la magnitud que forma parte del segundo miembro de (5.20), es una función de los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$, diferenciable en un punto dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Para esto es suficiente exigir que la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ sea dos veces diferenciable en el punto $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, y los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sean o bien variables independientes, o bien funciones dos veces diferenciables de ciertas variables independientes.

Para estas suposiciones podemos estudiar la diferencial

$$\delta(du) = \delta\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]$$

de la magnitud (5.20).

Definición 1. *El valor $\delta(du)$ de la diferencial de la primera diferencial* (5.20), *tomada para $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2$, ..., $\delta x_m = dx_m$, se llama segunda diferencial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (en un punto dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$) y se denota con el símbolo d^2u.* Así, pues, por definición *)

$$d^2u = \delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \delta x_2 = dx_2,\\ \ldots\ldots\\ \delta x_m = dx_m}} = \left\{\delta\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \delta x_2 = dx_2,\\ \ldots\ldots\\ \delta x_m = dx_m}}$$

---

*) El símbolo $\{\ \}\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \delta x_2 = dx_2,\\ \ldots\ldots\\ \delta x_m = dx_m}}$ significa que en la expresión encerrada entre llaves se debe adoptar $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2$, ..., $\delta x_m = dx_m$.

La diferencial $d^n u$ de cualquier orden n se introduce *por inducción*. Supongamos que ya está introducida la diferencial $d^{n-1}u$ de orden $n-1$ y que $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es n veces diferenciable en un punto dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, mientras que sus argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son variables independientes, o bien funciones n veces diferenciables de ciertas variables independientes $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Definición 2. *El valor $\delta(d^{n-1}u)$ de la diferencial de la $(n-1)$-ésima diferencial $d^{n-1}u$, tomada para $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2, \ldots, \delta x_m = dx_m$, se denomina n-ésima diferencial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (en un punto dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$) y se denota con el símbolo $d^n u$.* Así, por definición,

$$d^n u = \delta(d^{n-1}u)\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \delta x_2 = dx_2,\\ \cdots\cdots\\ \delta x_m = dx_m.}}$$

Al calcular las diferenciales segunda y ulteriores hay que distinguir rigurosamente dos casos: 1) el caso en que los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son variables independientes, 2) el caso en que los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son funciones de ciertas variables independientes $t_1, t_2, \ldots, t_k$, diferenciables el número correspondiente de veces.

Analicemos, al principio, el primer caso. Si $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son variables *independientes*, tenemos el derecho de considerar que $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ no dependen de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Cada diferencial dx_k podemos tomarlo igual a un mismo incremento Δx_k para todos los puntos $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. En este caso tendremos

$$\delta(dx_k) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(dx_k)}{\partial x_i}\delta x_i = 0.$$

La última relación y las reglas de diferenciación establecidas al final del p. 5, § 4, permiten escribir para una función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, dos veces diferenciable en un punto dado M, la siguiente cadena de igualdades:

$$d^2 u = \delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \cdots\cdots\\ \delta x_m = dx_m}} = \delta\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \cdots\cdots\\ \delta x_m = dx_m}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\delta\left[\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1,\\ \cdots\cdots\\ \delta x_m = dx_m}} = \sum_{k=1}^{m}\left\{dx_k\cdot\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \right.$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_k}\delta(dx_k)\Big\}\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1,\\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}=\sum_{k=1}^{m}\Big\{dx_k\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)\delta x_i\Big\}\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1,\\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}=$$

$$=\Big[\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\delta x_i\cdot dx_k\Big]\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1,\\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}dx_i\,dx_k. \quad (5.43)$$

(También hemos aprovechado el hecho de que para una función dos veces diferenciable las derivadas mixtas de segundo orden no depende de la sucesión en que se realiza la diferenciación.)

Hemos llegado, pues, a que cuando los argumentos $x_1, x_2, \dots, x_m$ son variables independientes, para la segunda diferencial de la función dos veces diferenciable en un punto dado $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ se verifica la representación

$$d^2u=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}dx_i\,dx_k \quad (5.44)$$

OBSERVACIÓN 1. Una función de m variables $t_1, t_2, \dots, t_m$ del tipo $\Phi=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}t_it_k$, donde a_{ik} son unos números reales constantes, se denomina *forma cuadrática* de las variables $t_1, t_2, \dots, t_m$, y los números a_{ik}, sus coeficientes.

Una forma cuadrática se llama simétrica, si sus coeficientes satisfacen la condición $a_{ik} = a_{ki}$ (para todo $i = 1, 2, \dots, m$, y todo $k = 1, 2, \dots, m$).

La expresión obtenida (5.44) permite afirmar que para el caso en que los argumentos $x_1, x_2, \dots, x_m$ son variables independientes, la segunda diferencial de la función $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, dos veces diferenciable en el punto dado M, es una forma cuadrática simétrica *) de las variables $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, cuyos coeficientes son iguales a las correspondientes derivadas parciales de segundo orden de la función $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ tomadas en el punto dado M.

Advirtamos que la expresión obtenida para la diferencial de segundo orden (5.44) puede escribirse también en una forma diferente,

---

*) La simetría de esta forma cuadrática deriva de la igualdad $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}(M)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_i}(M)$

utilizando el símbolo formal

$$d = dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}. \qquad (5.45)$$

Con ayuda de este símbolo la expresión (5.44) puede escribirse en la forma

$$d^2u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 u. \qquad (5.46)$$

Es fácil convencerse por inducción de que cuando los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, n veces diferenciable en el punto dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, son variables independientes, para la n-ésima diferencial de esta función se verifica la representación

$$d^nu = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \ldots \sum_{i_n=1}^{m} \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}} dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_n}.$$

Se puede escribir esta representación con ayuda del símbolo formal (5.45) en la forma siguiente:

$$d^nu = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n u. \qquad (5.47)$$

Las representaciones para la segunda diferencial y las ulteriores tienen una forma absolutamente diferente cuando los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ son funciones de ciertas variables independientes $t_1, t_2, \ldots, t_k$, diferenciables un número correspondiente de veces.

Volviendo a este caso, establezcamos una expresión para la segunda diferencial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, dos veces diferenciable en un punto dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, cuyos argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son funciones dos veces diferenciables de ciertas variables independientes $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Al repetir los razonamientos de la cadena (5.43), obtendremos

$$d^2u = \delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \ldots\ldots \\ \delta x_m = dx_m}} = \sum_{k=1}^{m} \left\{dx_k\, \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_k}\, \delta(dx_k)\right\}\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \ldots\ldots \\ \delta x_m = dx_m}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left\{dx_k \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \delta x_l\right\}\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \ldots\ldots \\ \delta x_m = dx_m}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left\{\frac{\partial u}{\partial x_k}\, \delta(dx_k)\right\}\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1, \\ \ldots\ldots \\ \delta x_m = dx_m}}.$$

Advirtamos que, en virtud de la definición de segunda diferencial de la función $u = x_k$ (donde k es cualquiera de los números 1, 2, ..., m)

$$[\delta(dx_k)]\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \vdots \\ \delta x_m = dx_m}} = d^2x_k.$$

Considerando esta relación, llegamos a la siguiente representación para la segunda diferencial:

$$d^2u = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l\,\partial x_k}\,dx_l\,dx_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k}\,d^2x_k$$

o bien, empleando el símbolo (5.45),

$$d^2u = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 u +$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}d^2x_m\right). \qquad (5.48)$$

Comparando la representación obtenida (5.48) con la (5.46), nos convencemos de que la segunda diferencial (en diferencia de la primera) ya no posee la propiedad de invariación de la forma.

Con mayor razón no poseen esta propiedad todas las diferenciales ulteriores.

OBSERVACIÓN 2. Demos a conocer un caso particular de importancia cuando la segunda diferencial y las posteriores de una función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de m variables poseen, no obstante, la invariación de la forma y se definen mediante la misma fórmula (5.47) que en caso de las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Diremos que las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son *funciones lineales* de las variables independientes $t_1, t_2, \ldots, t_k$ si se definen mediante las igualdades

$$x_i = a_{i0} + a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \ldots + a_{ik}t_k \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

en las cuales con $a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{ik}$ están designadas ciertas constantes.

Advirtamos que *si la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es n veces diferenciable en un punto dado $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ y si sus argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son funciones lineales de las variables independientes $t_1, t_2, \ldots, t_k$, la n-ésima diferencial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se define mediante la misma fórmula* (5.47) *que en caso de las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_m$.*

Con el fin de cerciorarnos de ello, advirtamos que por cuanto $t_1, t_2, \ldots, t_k$ son variables *independientes*, la n-ésima diferencial de x_i, siendo diferencial de las funciones de los argumentos $t_1, t_2, \ldots, t_k$, se define mediante una igualdad del tipo (5.47), y, con mayor

precisión, mediante la igualdad

$$d^n x_i = \left(dt_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + dt_2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \ldots + dt_k \frac{\partial}{\partial t_k}\right)^n x_i.$$

Mas, cualquier derivada parcial de orden superior al primero de una función lineal x_i es igual a cero.

Por consiguiente, $d^2x_i = 0$, $d^3x_i = 0, \ldots, d^nx_i = 0$.

La igualdad $d^2x_i = 0$ (para todos los $i = 1, 2, \ldots, m$) y la representación (5.48) permiten concluir que d^2u se define mediante la igualdad (5.46). De un modo análogo, aprovechando las relaciones $d^3x_i = 0, \ldots, d^nx_i = 0$, demostraremos por inducción que d^3u, $d^4u, \ldots, d^nu$ se definen mediante la igualdad (5.47).

OBSERVACION 3. Al realizar los cálculos se necesita, a veces, descifrar la igualdad (5.47) y, teniendo presente que ésta contiene términos que coinciden, escribir todos los términos diferentes de esta igualdad junto con sus coeficientes.

Con este fin puede emplearse la fórmula *del polinomio de Newton* que tiene la forma

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n \\ 0\leqslant\alpha_i\leqslant n}} \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}$$

(la sumación en el segundo miembro de esta fórmula se realiza respecto de todos los índices de números enteros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, cada uno de los cuales satisface las inecuaciones $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n$, a condición de que la suma de todos estos índices $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ sea igual a n).

La fórmula (5.49) se establece con facilidad por inducción. En efecto, para $m = 2$ y para cualquier n natural esta fórmula es a ciencia cierta válida, pues se transforma en la fórmula conocida del binomio de Newton.

Supongamos que esta fórmula es válida para cierto número $m \geqslant 2$ y todo n natural y comprobemos que en este caso es válida también para cualquier número $m + 1$ y todo n natural.

Al representar $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1})^n$ en la forma

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{m+1})^n = [(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + a_{m+1}]^n,$$

calculemos, con ayuda del binomio de Newton, el coeficiente de $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots$ $\ldots a_m^{\alpha_m} a_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$. En virtud de la igualdad $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m+1} = n$, de la fórmula del binomio de Newton y la suposición sobre la validez de la fórmula (5.49), para el número m y todo n natural, este coeficiente será: *)

$$C_n^{\alpha_{m+1}} \cdot \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)!}{(\alpha_1)!\,(\alpha_2)!\ldots(\alpha_m)!} =$$

$$= \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m+\alpha_{m+1})!}{(\alpha_{m+1})!\,(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)!} \cdot \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)!}{(\alpha_1)!\,(\alpha_2)!\ldots(\alpha_m)!} =$$

$$= \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m+\alpha_{m+1})!}{(\alpha_1)!\,(\alpha_2)!\ldots(\alpha_m)!\,(\alpha_{m+1})!}.$$

*) Tenemos en cuenta que $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, y, por eso,

$$C_n^{\alpha_{m+1}} = C_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{m+1}}^{\alpha_{m+1}} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m+\alpha_{m+1})!}{(\alpha_{m+1})!\,(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)!}.$$

La expresión obtenida para el coeficiente de $a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m} \cdot a_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$ coincide plenamente con la expresión que se obtiene a partir de la fórmula (5.49) sustituyendo en ella m por $m+1$.

La inducción queda terminada y la fórmula (5.49) está demostrada.

La fórmula (5.49) nos permite escribir la expresión (5.47) para la n-ésima diferencial en la forma siguiente

$$d^n u(M) = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n \\ 0\leqslant\alpha_i\leqslant n}} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}(M)\cdot(dx_1)^{\alpha_1}\cdot(dx_2)^{\alpha_2}\ldots(dx_m)^{\alpha_m}.$$

3. Fórmula de Taylor para una función de m variables con el término residual en forma de Lagrange. Denotaremos la diferencial de k-ésimo orden de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ en el punto M con el símbolo $d^k u|_M$. Demostremos el teorema siguiente.

Teorema 5.15. Supongamos que una función $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ viene dada en cierto ε-entorno) del punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ y que es $n+1$ veces diferenciable en el ε-entorno citado. Entonces, el incremento total $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ de dicha función en el punto M_0 para cualquier punto de M del ε-entorno indicado puede ser representado en la forma siguiente:*

$$\Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!}d^n u|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u|_N, \tag{5.50}$$

donde N es cierto punto del ε-entorno mencionado que en el caso general sólo depende de $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, y las diferenciales dx_i de las variables x_i que integran las expresiones $d^k u|_{M_0}$ y $d^{n+1}u|_N$ son iguales a $\Delta x_i = x_i - \overset{\circ}{x}_i$. La fórmula (5.50) se llama fórmula de Taylor para la función $u = f(M)$ con centro del desarrollo en el punto M_0.

DEMOSTRACION. Para reducir las notaciones, analicemos el caso de la función $u = f(x, y)$ de dos variables x e y. Previamente escribamos en una forma especial la fórmula de Taylor para la función $u = F(t)$ de una sola variable t, $n+1$ veces diferenciable en cierto entorno de un punto t_0. Recordemos que la fórmula de Taylor con centro del desarrollo en t_0 para la función $u = F(t)$ de una sola variable tiene la forma (el término residual se toma en forma de Lagrange):

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}F^{(2)}(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}\times$$
$$\times(t_0+\theta(t-t_0))(t-t_0)^{n+1}, \quad 0<\theta<1. \tag{5.51}$$

*) En lugar del ε-entorno del punto M_0 se puede tomar el llamado *entorno estelar* de dicho punto que se define como un entorno del punto M_0, el cual, junto con cada uno de sus puntos M, contiene íntegramente el segmento M_0M.

Por cuanto el argumento t es una variable independiente, el incremento $\Delta t = t - t_0$ es la diferencial dt de la variable independiente t. Por eso

$$F^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k = F^{(k)}(t_0)\,dt^k = d^kF(t_0) = d^ku\,|_{t_0}$$

y

$$F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))(t-t_0)^{n+1} = d^{n+1}u\,|_{t_0+\theta(t-t_0)}. \tag{5.52}$$

Al denotar la diferencia $F(t) - F(t_0)$ con Δu, la fórmula de Taylor (5.51) puede ser escrita, de acuerdo con (5.52), en la siguiente forma especial:

$$\Delta u = du\,|_{t_0} + \frac{1}{2!}d^2u\,|_{t_0} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}d^nu\,|_{t_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}u\,|_{t_0+\theta(t-t_0)}. \tag{5.53}$$

Veamos ahora en el ε-entorno del punto $M_0(x_0, y_0)$ un punto arbitrario $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ y unamos los puntos M_0 y M mediante una recta. Evidentemente, las coordenadas x e y de los puntos de la citada recta son las siguientes *funciones lineales* de la nueva variable t:

$$x = x_0 + t\,\Delta x, \quad y = y_0 + t\,\Delta y; \tag{5.54}$$

y, además, las coordenadas de los puntos del segmento M_0M corresponden a los valores de la variable t del segmento $[0, 1]$. Notemos que al valor de $t = 0$ le corresponde el punto M_0, y al valor de $t = 1$, el punto M. Dado que, por hipótesis, la función $u = f(x, y)$ de dos variables x e y es $n + 1$ veces diferenciable en el entorno que se considera, de las fórmulas (5.54) se deduce que en la recta M_0M esta función viene a ser la función compuesta de la variable t, $(n + 1)$ veces diferenciable al menos para todos los valores de t del segmento $[0, 1]$. Denotemos esta función compuesta con $F(t)$ y escribamos para ella la fórmula de Taylor con centro de desarrollo en el punto $t_0 = 0$ en la forma especial (5.53) para

$$\Delta u = F(1) - F(0) = f(M) - f(M_0).$$

Las diferenciales de diferentes órdenes que figuran en la fórmula (5.53) son diferenciales de la función compuesta $u = f(x, y)$, donde x e y son funciones lineales (5.54). De conformidad con la observación del punto anterior, en estas condiciones las diferenciales de cualquier orden de la función $u = f(x, y)$ pueden ser escritas en la forma (5.47). Por eso,

$$\left.\begin{aligned} d^ku\,|_{t_0=0} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k u\,|_{M_0(x_0,\,y_0)} = d^ku\,|_{M_0}, \\ d^{n+1}u\,|_{t_0+\theta(1-t_0)} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} \times \\ &\times u\,|_{N(x_0+\theta\Delta x,\; y_0+\theta\Delta y)} = d^{n+1}u\,|_N. \end{aligned}\right\} \tag{5.55}$$

con la particularidad de que en las fórmulas (5.55) dx y dy se hallan a partir de las relaciones (5.54) para $dt = \Delta t = 1 - 0 = 1$. De este modo, en las fórmulas (5.55)

$$dx = dt\,\Delta x = \Delta x \quad \text{y} \quad dy = dt\,\Delta y = \Delta y. \tag{5.56}$$

Introduciendo $d^k u\,|_{t_0}$ y $d^{n+1}u\,|_{t_0+\theta(t-t_0)}$ de (5.55) en la fórmula (5.53) y considerando las relaciones (5.56), obtendremos la fórmula de Taylor (5.50). El teorema queda demostrado.

He aquí la expresión desarrollada de la fórmula de Taylor (5.50) para la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - \overset{\circ}{x}_2) + \ldots\right. \\ &\left.\ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m - \overset{\circ}{x}_m)\right]^k f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - \overset{\circ}{x}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - \overset{\circ}{x}_2) + \ldots\right. \\ &\left.\ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m - \overset{\circ}{x}_m)\right]^{n+1} f[\overset{\circ}{x}_1 + \theta(x_1 - \overset{\circ}{x}_1), \\ &\overset{\circ}{x}_2 + \theta(x_2 - \overset{\circ}{x}_2), \ldots, \overset{\circ}{x}_m + \theta(x_m - \overset{\circ}{x}_m)]. \end{aligned} \tag{5.57}$$

4. Fórmula de Taylor con el término residual en forma de Peano.

Teorema 5.15*. *Supongamos que $n \geqslant 1$ es un número entero y que está dada una función $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $(n-1)$ veces diferenciable en el ε-entorno del punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ y n veces diferenciable en el propio punto M_0 *). Entonces, para todo punto M del mencionado ε-entorno de M_0 resulta ser válida la fórmula siguiente:*

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}du\,|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u\,|_{M_0} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!}d^nu\,|_{M_0} + o(\rho^n), \tag{5.58}$$

en la cual con ρ está designada la distancia $\rho(M_0, M)$, y el símbolo $o(\rho^n)$ denota una función infinitésima para $\rho \to 0$ (o para $M \to M_0$), cuyo orden de infinitud es más elevado que ρ^n.

La fórmula (5.58) se denomina *fórmula de Taylor* (con centro en el punto M_0), cuyo término residual se expresa en *la forma de Peano*.

*) Cuando $n = 1$ se debe exigir que la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ esté definida sólo en el ε-entorno del punto M_0 y sea diferenciable en el propio punto M_0.

OBSERVACION. En la notación más detallada la fórmula de Taylor (5.58) tiene la forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\Big[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots$$

$$\ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\Big]^k f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) + o(\rho^n). \qquad (5.59)$$

Notemos que el segundo miembro de (5.59) contiene la suma del polinomio de n-ésimo grado de m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ y del término residual $o(\rho^n)$.

Denotemos con $R_{n+1}(M)$ la diferencia entre $f(M)$ y el polinomio mencionado, es decir, pongamos

$$R_{n+1}(M) = f(M) - f(M_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\Big[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots$$

$$\ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\Big]^k f(M_0). \qquad (5.60)$$

El teorema 5.15* quedará demostrado si establecemos que, cumplidas las condiciones de este teorema, $R_{n+1}(M) = o(\rho^n)$.

Antes de demostrar el teorema 14.15* aduzcamos dos lemas.

Lema 1. Si una función $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es n veces diferenciable en un punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, tanto la propia función $R_{n+1}(M)$, definida mediante la igualdad (5.60), *como todas las derivadas parciales suyas respecto de cualesquiera variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de orden hasta n inclusive se anulan en el punto M_0.*

DEMOSTRACION. Cuando $n = 1$, la función (14.60) toma la forma

$$R_2(M) = f(M) - f(M_0) - (x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) - \ldots$$

$$\ldots - (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0),$$

y las igualdades $R_2(M_0) = 0$, $\frac{\partial R_2}{\partial x_i}(M_0) = 0$ (para todos $i = 1, 2, \ldots, m$) se comprueban de un modo elemental.

Para realizar la inducción, supongamos que el lema es válido con cierto número $n \geqslant 1$ y demostremos que en tal caso lo es también para el número $n + 1$.

Sea $f(M)$ una función $(n + 1)$ veces diferenciable en el punto M_0 y

$$R_{n+2}(M) = f(M) - f(M_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\Big[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} +$$

$$\ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\Big]^k f(M_0). \qquad (5.61)$$

La igualdad $R_{n+2}(M_0) = 0$ se comprueba de un modo elemental (basta considerar que cada diferencia entre paréntesis $(x_i - \overset{\circ}{x}_i)$ en (5.61) se anula en el punto M_0).

Queda por demostrar que para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ la propia función $\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_i}(M)$ y todas las derivadas parciales de esta función de orden hasta n inclusive se reducen a cero en el punto M_0, y con este fin, en virtud de la suposición admitida sobre la validez del lema para el número n, es suficiente señalar que la función $\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_i}(M)$ se define mediante la igualdad (14.60), y con mayor precisión, mediante la igualdad

$$\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(M) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) \qquad (5.62)$$

Por cuanto todas las variables x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ son equitativas e intervienen en la expresión para $R_{n+2}(M)$ de un modo simétrico, es suficiente demostrar la igualdad (5.62) para $i = 1$, es decir, demostrar la igualdad

$$\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_1}(M) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) \qquad (5.63)$$

La fórmula (5.61) evidencia que para demostrar (5.63) basta convencerse de que para cada número $k = 1, 2, \ldots, n+1$ con x_2, $x_3, \ldots, x_m$ fijos

$$\frac{d}{dx_1}\left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f(M_0) = k\left[(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} +\right.$$
$$\left. + (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0). \qquad (5.64)$$

Al diferenciar respecto de x_1, las variables $x_2, x_3, \ldots, x_m$ son fijas, razón por la cual la magnitud

$$D = (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}$$

puede considerarse, al diferenciar respecto de x_1, como una magnitud constante. Conviene añadir que por cuanto los símbolos $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots$

..., $\frac{\partial}{\partial x_m}$ se emplean para formar las derivadas parciales de la función f en un punto *fijo* M_0, entonces, al diferenciar respecto de x_1, los citados símbolos también deben tomarse por magnitudes constantes.

En virtud de lo dicho, para demostrar la igualdad (14.64), basta convencerse de que es válida la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right]^k=k\left[(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right]^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (5.65)$$

Al diferenciar la función $\left[(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right]^k$ respecto de x_1 como función compuesta y considerando la independencia, señalada más arriba, de los símbolos D y $\frac{\partial}{\partial x_1}$ respecto de x_1, obtendremos la igualdad (5.65). La inducción se da por terminada.

El lema 1 está demostrado.

Lema 2. Sea $R(M) = R(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ una función arbitraria que satisface dos exigencias:

1) $R(M)$ es n veces diferenciable en un punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$,

2) la propia función $R(M)$ y todas las derivadas parciales suyas respecto de cada una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de orden hasta n inclusive se reducen a cero en el punto mencionado M_0. Entonces, para la función $R(M)$ es válida la estimación

$$R(M) = o(\rho^n), \quad (5.66)$$

donde la letra ρ designa la distancia $\rho(M_0, M)$ entre los puntos M_0 y M.

DEMOSTRACIÓN. Cuando $n = 1$, la afirmación del lema se desprende de la condición de diferenciabilidad *) de la función $R(M)$ en el punto M_0, la cual tiene la forma

$$R(M)-R(M_0)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial R}{\partial x_k}(M_0)(x_k-\overset{\circ}{x}_k)+o(\rho).$$

Considerando que $R(M_0)=0$, $\frac{\partial R}{\partial x_k}(M_0)=0$ para todo $k=1, 2, \ldots, m$, llegamos a que $R(M)=o(\rho)$.

Al realizar la inducción, supongamos que el lema 2 es válido para cierto número $n \geqslant 1$ y demostremos que en tal caso lo es también para el número $n + 1$.

Supongamos que la función $R(M)$ satisface dos requisitos del lema 2 *para el número $n + 1$*. Entonces, evidentemente, cualquier derivada parcial de esta función de primer orden $\frac{\partial R}{\partial x_k}(M)$ ($k =$

*) Véase la relación (5.16) del p. 2 § 4 de este capítulo.

$= 1, 2, \ldots, m$) satisfará los dos requisitos del lema 2 *para el número n*, por lo cual (en virtud de la suposición admitida sobre la validez del lema 2 para el número n) será válida la estimación

$$\frac{\partial R}{\partial x_k}(M) = o(\rho^n). \qquad (5.66^*)$$

Advirtamos, ahora, que por cuanto $n \geqslant 1$, tenemos $n + 1 \geqslant 2$, y la función $R(M)$, que satisface dos requisitos del lema 2 para el número $n + 1$, es en todo caso diferenciable una vez en un entorno del punto M_0. Por eso, para esta función quedan cumplidas las condiciones del teorema 5.15 para el número $n = 0$. De acuerdo con el teorema mencionado, para todo punto M de un ε-entorno suficientemente pequeño del punto M_0 en el segmento M_0M existe un punto N tal que es válida la fórmula

$$R(M) = R(M_0) + \frac{1}{1!}\sum_{k=1}^{m}(x_k - \overset{*}{x}_k)\frac{\partial R}{\partial x_k}(N). \qquad (5.67)$$

Diremos ahora que por cuanto el punto N se encuentra entre los puntos M_0 y M, y ρ es la distancia entre los puntos M_0 y M, entonces $\rho(N, M_0) \leqslant \rho$, y, por eso, de (5.66*) se desprende que

$$\frac{\partial R}{\partial x_k}(N) = o(\rho^n).$$

Introduciendo la última estimación en (5.67) y considerando que $R(M_0) = 0$, obtendremos

$$R(M) = o(\rho^n)\sum_{k=1}^{m}|x_k - \overset{*}{x}_k|.$$

Dado que $|x_k - \overset{*}{x}_k| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overset{*}{x}_i)^2} = \rho$, obtenemos en definitiva que $R(M) = o(\rho^n)$.

La inducción se da por terminada. El lema 2 está demostrado.

LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.15* se lleva a cabo fácilmente con ayuda de los lemas 1 y 2.

En efecto, ya se ha hecho constar más arriba que para demostrar el teorema 5.15*, basta establecer la validez de la estimación

$$R_{n+1}(M) = o(\rho^n)$$

a condición de que se cumplan las condiciones del teorema para la función (5.60).

En virtud del lema 1, la propia función (5.60) y todas las derivadas parciales suyas respecto de cualquiera de las variables x_1, $x_2, \ldots, x_m$ de orden hasta n inclusive se anulan en el punto M_0. Pero, en este caso, en virtud del lema 2, para la función (14.60) es válida la estimación $R_{n+1}(M) = o(\rho^m)$.

El teorema 5.15* está demostrado.

§ 6. Extremo local de una función de *m* variables

1. Concepto de extremo de una función de *m* variables. Condiciones necesarias de un extremo local. Supongamos que la función de *m* variables $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ está definida en cierto entorno del punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ de un espacio E^m.

Definición 1. Diremos que *la función $u = f(M)$ tiene en el punto M_0 un máximo local (mínimo local) si existe un δ-entorno del punto M_0, en cuyos márgenes el valor $f(M_0)$ es el máximo (mínimo) entre todos los valores $f(M)$ de esta función.*

Definición 2. Diremos que *la función $u = f(M)$ tiene en el punto M_0 un extremo local si tiene en dicho punto o bien el máximo local, o bien el mínimo local.*

Establezcamos las condiciones necesarias de un extremo local de la función $u = f(M)$ que posee en el punto dado M_0 derivadas parciales de primer orden respecto de todas las variables.

Demostremos la *afirmación* siguiente: *si una función $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ posee en un punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ derivadas parciales de primer orden respecto de todas las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ y tiene en este punto un extremo local, todas las derivadas parciales de primer orden se reducen a cero en el punto M_0, es decir, se verifican las igualdades*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0) = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0) = 0. \qquad (5.68)$$

DEMOSTRACIÓN. Establezcamos la validez de la primera igualdad (5.68). Fijemos en la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ los argumentos $x_2, x_3, \ldots, x_m$, adoptándolos iguales a las coordenadas correspondientes del punto M_0, es decir, haciendo $x_2 = \overset{\circ}{x}_2$, $x_3 = \overset{\circ}{x}_3, \ldots, x_m = \overset{\circ}{x}_m$. Obtenemos, pues, la función $u = f(x_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ de una sola variable x_1. La derivada de esta función de una sola variable en el punto $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$ coincide con la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$.

Por cuanto la función de *m* variables $u = f(M)$ posee su extremo local en el punto M_0, la citada función de una sola variable $u = f(x_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ tiene el extremo local en el punto $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$, y, por eso (en virtud de los resultados del p. 2, § 7, cap. 8, t. 1) la derivada de esta función de una sola variable en el punto $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$, que coincide con la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$, es igual a cero.

La primera igualdad de (5.68) está demostrada. Las demás igualdades de (5.68) se demuestran de un modo análogo.

Recalquemos que las igualdades (5.68) (es decir, la anulación en el punto dado M_0 de todas las derivadas parciales de primer

orden) son sólo condiciones necesarias, pero no suficientes para que haya extremo local de la función $u = f(M)$ en el punto M_0.

Por ejemplo, ambas derivadas parciales de una función de dos variables $u = xy$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$, se anulan en el punto M_0 (0, 0), no obstante, la citada función no tiene ningún extremo en el punto M_0 (0, 0), puesto que la función $u = xy$ es nula en el mismo punto M_0 (0, 0), mientras que toma valores tanto positivos, como negativos en un δ-entorno tan pequeño como se quiera.

Los puntos, en los que se anulan todas las derivadas parciales de primer orden de la función $y = f(M)$, se denominan *puntos de extremo eventual* de dicha función.

En cada punto de extremo eventual la función $u = f(M)$ puede tener un extremo local, pero, la existencia de este extremo puede establecerse sólo con ayuda de las condiciones suficientes de un extremo local que se analizan en el punto siguiente.

De la afirmación demostrada más arriba se desprende también otra forma de las condiciones necesarias de un extremo local:

si una función $u = f(M)$ es diferenciable en un punto M_0 y tiene en el mismo un extremo local, la diferencial $du|_{M_0}$ de esta función en el punto M_0 es idénticamente igual a cero respecto de las diferenciales de las variables independientes $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$.

En efecto, por cuanto

$$du\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\,dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\,dx_m,$$

de las igualdades (5.68) se deduce que, *cualesquiera que sean dx_1, $dx_2, \ldots, dx_m$*, queda válida la igualdad $du|_{M_0} = 0$.

2. Condiciones suficientes de un extremo local. En la formulación de las condiciones suficientes de un extremo local de la función de m variables $u = f(M)$ un papel importante lo desempeña la segunda diferencial de esta función en el punto M_0 sujeto al examen.

En el p. 2, § 5 de este capítulo nos hemos convencido de que cuando los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de una función dos veces diferenciable $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ son o bien variables independientes, o bien funciones lineales de ciertas variables independientes, la segunda diferencial de esta función en el punto dado M_0 es una forma cuadrática respecto de las diferenciales de los argumentos $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ del tipo siguiente.

$$d^2u\,|_{M_0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,dx_i\,dx_k, \tag{5.69}$$

donde

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}(M_0). \tag{5.70}$$

Para formular las condiciones suficientes de un extremo local nos harán falta algunos datos de la teoría de las formas cuadráticas que daremos a conocer, para mayor comodidad del lector, más abajo *).

La forma cuadrática respecto de las variables $h_1, h_2, \ldots, h_m$

$$\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k \tag{5.71}$$

se denomina *definida positiva* (*definida negativa*) si para cualesquiera valores $h_1, h_2, \ldots, h_m$ que no son simultáneamente nulos, esta forma toma valores estrictamente positivos (estrictamente negativos).

La forma cuadrática (5.71) se llama forma *de signo definido* si es o bien definida positiva, o bien definida negativa.

La forma cuadrática (5.71) se llama forma *de signo variable* si toma valores tanto estrictamente positivos, como estrictamente negativos.

La forma cuadrática (5.71) se llama forma *de signo casi definido* si toma o bien sólo valores no negativos, o bien sólo valores no positivos, anulándose para los valores $h_1, h_2, \ldots, h_m$ que no son simultáneamente nulos.

Enunciemos el llamado *criterio de Sylvester* que caracteriza la definición del signo de una forma cuadrática **).

Llamemos *matriz de forma cuadrática* (5.71) la siguiente expresión:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}. \tag{5.72}$$

Si todos los elementos de la matriz A satisfacen la condición $a_{ik} = a_{ki}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, m$), esta matriz se llama *simétrica*.

Llamemos *menores principales* de la matriz simétrica (5.72) los siguientes determinantes:

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots, A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

*) Todas las definiciones y afirmaciones aquí aducidas pueden encontrarse, por ejemplo, en *Algebra lineal* de V. A. Ilin y E. G. Pozniak (en ruso).

**) J. Sylvester (1814—1897), matemático inglés.

El criterio de Sylvester se enuncia en forma de las dos afirmaciones siguientes:

1°. *Para que la forma cuadrática (5.71) con la matriz simétrica (5.72) sea definida positiva, es necesario y suficiente que todos los menores principales de la matriz (5.72) sean positivos, es decir, que se cumplan las desigualdades*

$$A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ \ldots,\ A_m > 0.$$

2°. *Para que la forma cuadrática (5.71) con la matriz simétrica (5.72) sea definida negativa, es necesario y suficiente que los signos de los menores principales de la matriz (1.72) se alternen, con la particularidad de que el signo de A_1 sea negativo, es decir, que se verifiquen las desigualdades*

$$A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0,\ A_4 > 0,\ \ldots$$

Ahora ya estamos listos para poder enunciar y demostrar un teorema que establece las condiciones de un extremo local.

Teorema 5.16. *Supongamos que una función de m variables $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es una vez diferenciable en cierto entorno del punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ y dos veces diferenciable en el propio punto M_0. Admitamos, además, que el punto M_0 es el punto de extremo eventual de la función $u = f(M)$, es decir, que $du \mid_{M_0} = 0$. Entonces, si la segunda diferencial (5.69)—(5.70) es una forma cuadrática definida positiva (definida negativa) de las variables $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, la función $u = f(M)$ tiene en el punto M_0 un mínimo local (máximo local). En cambio, si la segunda diferencial (5.69)—(5.70) es una forma cuadrática de signo variable, la función $u = f(M)$ no tiene extremo local en el punto M_0.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos, al principio, la primera parte del teorema, suponiendo, para concretar, que la segunda diferencial (5.69)—(5.70) es una forma cuadrática definida positiva de las variables $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$. Demostremos que en este caso la función $u = f(M)$ tiene en el punto M_0 un mínimo local.

Desarrollemos la función $u = f(M)$ en un entorno del punto M_0 de conformidad con la fórmula de Taylor con término residual en forma de Peano, adoptando en la citada fórmula $n = 2$ *).

Obtendremos que

$$f(M) - f(M_0) = du \mid_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u \mid_{M_0} + o(\rho^2), \qquad (5.73)$$

con la particularidad de que en la igualdad (5.73) las diferenciales dx_k de las variables x_k, que figuran en las expresiones para $du \mid_{M_0}$ y $d^2u \mid_{M_0}$, son iguales a los incrementos correspondientes $(x_k - \overset{\circ}{x}_k)$

) Para la función $u = f(M)$ quedan cumplidas, con $n = 2$, todas las condiciones del teorema 5.15 (véase p. 4, § 5 de este capítulo).

de estas variables, mientras que la magnitud ρ tiene la forma

$$\rho = \sqrt{(dx_1)^2+(dx_2)^2+\ldots+(dx_m)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_1-\overset{*}{x}_1)^2+(x_2-\overset{*}{x}_2)^2+\ldots+(x_m-\overset{*}{x}_m)^2}. \quad (5.74)$$

Por la hipótesis del teorema, el punto M_0 es un punto de extremo eventual. Por eso, en vista de los resultados del punto anterior, $du_{M_0}=0$. Teniendo en cuenta esta igualdad y suponiendo en las expresiones (5.69)—(5.70) para la segunda diferencial $dx_k = x_k - \overset{*}{x}_k$, demos a la fórmula de Taylor (5.73) la forma siguiente:

$$f(M)-f(M_0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(x_i-\overset{*}{x}_i)(x_k-\overset{*}{x}_k)+o(\rho^2). \quad (5.75)$$

Es suficiente probar que para todos los ρ suficientemente pequeños el segundo miembro de (5.75) es positivo. (Esto significará precisamente que en un entorno suficientemente pequeño del punto M_0 la diferencia $f(M)-f(M_0)$ es positiva, es decir, la función $u=f(M)$ tiene en el punto M_0 un mínimo local).

Adoptemos $h_i = \frac{x_i-\overset{*}{x}_i}{\rho}$, donde $i=1, 2, \ldots, m$. Entonces, de la expresión (5.74) para ρ se deducen las relaciones siguientes:

$$|h_i| \leqslant 1, \quad h_1^2+h_2^2+\ldots+h_m^2=1. \quad (5.76)$$

Con ayuda de las designaciones introducidas la igualdad (5.75) puede ser escrita en la forma

$$f(M)-f(M_0)=\frac{\rho^2}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}h_ih_k+o(\rho^2). \quad (5.75^*)$$

La relación $\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}$ es una función infinitésima para $\rho\to 0$ (o bien para $M\to M_0$), la cual se denotará con $\alpha(\rho)$. Introduciendo esta función se puede escribir la igualdad $o(\rho^2)=\rho^2\cdot\alpha(\rho)$, con cuya ayuda daremos a la relación (5.75*) la forma siguiente:

$$f(M)-f(M_0)=\rho^2\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}h_ih_k+\alpha(\rho)\right]. \quad (5.75^{**})$$

Ahora ya no es difícil demostrar que el segundo miembro de (5.75**) es positivo para cualquier ρ suficientemente pequeño. La

forma cuadrática $\Phi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}h_ih_k$ es una función definida y continua en la superficie de la esfera unidad (5.76) que constituye un conjunto cerrado y acotado. De acuerdo con el segundo teorema de Weierstrass (véase teorema 5.7 del p. 2, § 3, cap. 5), esta función alcanza en este conjunto su cota inferior exacta μ; además, dado que la forma cuadrática (5.71) es definida positiva y que $h_1, h_2, \ldots, h_m$ que satisfacen la relación (5.76), no son iguales a cero simultáneamente, la citada cota inferior exacta μ *es estrictamente positiva*.

Por cuanto la función $\alpha(\rho)$, infinitésima para $\rho \to 0$, satisface, para todos los ρ suficientemente pequeños, la desigualdad $|\alpha(\rho)| < \mu$, todo el miembro derecho de (5.75) es positivo para todos los ρ suficientemente pequeños, es decir, para todos los M suficientemente próximos a M_0.

Esto es precisamente un indicio de que la función $u = f(M)$ tiene un mínimo local en el punto M_0.

De un modo análogo se demuestra que cuando la segunda diferencial (5.69)—(5.70) es una forma cuadrática definida negativa, la función $u = f(M)$ tiene en el punto M_0 un máximo local.

Demostremos ahora la segunda parte del teorema, es decir, probemos que si la segunda diferencial (5.69)—(5.70) es una forma cuadrática de signo variable, la función $u = f(M)$ no tiene extremo local en el punto M_0.

Establezcamos, ante todo, la siguiente propiedad auxiliar de la forma cuadrática de signo variable (5.71).

Si una forma cuadrática $\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ *es de signo variable, existen dos colecciones de variables* $(h'_1, h'_2, \ldots, h'_m)$ *y* $h''_1, h''_2, \ldots, h''_m)$ *tales que*

$$(h'_1)^2 + (h'_2)^2 + \ldots + (h'_m)^2 = 1, \quad (h''_1)^2 + (h''_2)^2 + \ldots + (h''_m) = 1, \tag{5.77}$$

con la particularidad de que

$$\Phi(h'_1, h'_2, \ldots, h'_m) > 0, \quad \Phi(h''_1, h''_2, \ldots, h''_m) < 0. \tag{5.78}$$

En efecto, en virtud de la definición de la forma cuadrática de signo variable se encontrarán dos colecciones de argumentos $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_m)$ y $(t''_1, t''_2, \ldots, t''_m)$, compuestas de números no nulos simultáneamente, de tal género que

$$\Phi(t'_1, t'_2, \ldots, t'_m) > 0, \quad \Phi(t''_1, t''_2, \ldots, t''_m) < 0. \tag{5.79}$$

Adoptando

$$h'_i = \frac{t'_i}{\sqrt{(t'_1)^2 + (t'_2)^2 + \ldots + (t'_m)^2}}, \qquad h''_i = \frac{t''_i}{\sqrt{(t''_1)^2 + (t''_2)^2 + \ldots + (t''_m)^2}} \tag{5.80}$$

y considerando que de la definición (5.71) de la forma cuadrática se deduce inmediatamente que

$$\Phi(h'_1, h'_2, \ldots, h'_m) = \frac{1}{(t'_1)^2+(t'_2)^2+\ldots+(t'_m)^2}\cdot\Phi(t'_1, t'_2, \ldots, t'_m),$$

$$\Phi(h''_1, h''_2, \ldots, h''_m) = \frac{1}{(t''_1)^2+(t''_2)^2+\ldots+(t''_m)^2}\cdot\Phi(t''_1, t''_2, \ldots, t''_m),$$

obtendremos (en virtud de (5.79)) las desigualdades (5.78), con la particularidad de que de las relaciones (5.80) provienen directamente las igualdades (5.77).

La propiedad auxiliar de la forma cuadrática de signo variable está demostrada.

Volvamos ahora a la demostración de la segunda parte del teorema.

Fijemos dos colecciones de variables $(h'_1, h'_2, \ldots, h'_m)$ y $(h''_1, h''_2, \ldots, h''_m)$ que satisfacen las relaciones (5.77) y (5.78) y demostremos que para todo $\rho > 0$ existen dos puntos $M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ y $M''(x''_1, \ldots, x''_m)$ del espacio E^m de tal género que $\rho(M', M_0) = \rho(M'', M_0) = \rho$, con la particularidad de que

$$\frac{x'_i-\overset{0}{x}_i}{\rho} = h'_i, \quad \frac{x''_i-\overset{0}{x}_i}{\rho} = h''_i \text{ para todo } i=1, 2, \ldots, m. \quad (5.81)$$

En efecto, adoptando para cualquier $\rho > 0$ y para todo número i ($i = 1, 2, \ldots, m$)

$$x'_i = \overset{0}{x}_i + \rho h'_i, \quad x''_i = \overset{0}{x}_i + \rho h''_i,$$

satisfaremos las relaciones (5.81); además, en virtud de las igualdades (5.77), serán válidas las igualdades

$$\rho(M', M_0) = \sqrt{(x'_1-\overset{0}{x}_1)^2+(x'_2-\overset{0}{x}_2)^2+\ldots+(x'_m-\overset{0}{x}_m)^2} = \rho\sqrt{(h'_1)^2+(h'_2)^2+\ldots+(h'_m)^2} = \rho,$$

$$\rho(M'', M_0) = \sqrt{(x''_1-\overset{0}{x}_1)^2+(x''_2-\overset{0}{x}_2)^2+\ldots+(x''_m-\overset{0}{x}_m)^2} = \rho\sqrt{(h''_1)^2+(h''_2)^2+\ldots+(h''_m)^2} = \rho.$$

Ahora ya no es difícil convencerse de que cuando la segunda diferencial (5.69) – (5.70) es una forma cuadrática de signo variable, la función $u = f(M)$ no tiene extremo en el punto M_0.

Al escribir para la función $u = f(M)$ el desarrollo en un entorno del punto M_0 según la fórmula de Taylor con término residual en forma de Peano y al tomar este desarrollo en los puntos M' y M'' mencionados más arriba, obtendremos en lugar de (5.75) los dos desa-

rrollos siguientes:

$$f(M') - f(M_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} (x_i' - \overset{\circ}{x}_i)(x_k' - \overset{\circ}{x}_k) + o(\rho^2), \quad (5.82)$$

$$f(M'') - f(M_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} (x_i'' - \overset{\circ}{x}_i)(x_k'' - \overset{\circ}{x}_k) + o(\rho^2), \quad (5.83)$$

válidos para todos los $\rho > 0$ suficientemente pequeños.

Introduciendo en estos desarrollos los valores $(x_i' - \overset{\circ}{x}_i)$ y $(x_i'' - \overset{\circ}{x}_i)$ de las igualdades (5.81) y considerando que $o(\rho^2) = \rho^2 \cdot \alpha(\rho)$, donde $\alpha(\rho) \to 0$ cuando $\rho \to 0$, daremos a los desarrollos (5.82) y (5.83) la forma siguiente

$$f(M') - f(M_0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i' h_k' + \alpha(\rho) \right],$$

$$f(M'') - f(M_0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i'' h_k'' + \alpha(\rho) \right].$$

Las últimas dos relaciones pueden reescribirse en la forma

$$f(M') - f(M_0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m') + \alpha(\rho) \right], \quad (5.82^*)$$

$$f(M'') - f(M_0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'') + \alpha(\rho) \right]. \quad (5.83^*)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (5.78) y el hecho de que las magnitudes $\Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m') > 0$ y $\Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'') < 0$ no dependen de ρ, y recordando que $\rho = \rho(M', M_0) = \rho(M'', M_0)$, obtenemos de las relaciones (5.82*) y (5.83*) que para $\rho > 0$, tan pequeño como se quiera, se cumplen las desigualdades $f(M') > f(M_0)$ y $f(M'') < f(M_0)$ que demuestran precisamente la ausencia de extremo en el punto M_0.

El teorema 5.16 está plenamente demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Si la segunda diferencial de una función $u = f(M)$, dos veces diferenciable en un punto dado de extremo eventual M_0, es en dicho punto una forma cuadrática de signo casi definido, no puede decirse nada concreto sobre la existencia o ausencia en este punto de un extremo local.

Así, por ejemplo, en cada una de las dos funciones $u_1 = x^3 + y^3$ y $u_2 = x^4 + y^4$ la segunda diferencial en el punto de extremo eventual M_0 (0, 0) es idénticamente igual a cero (es decir, es una forma cuadrática de signo casi definido), mas, sólo la segunda de las funciones mencionadas tienen en dicho punto un extremo local.

Con el fin de resolver la cuestión de extremo local para el caso en que la segunda diferencial es una forma cuadrática de signo casi definido, se deben examinar las diferenciales de órdenes más elevados, pero esto sale de los márgenes del curso dado.

OBSERVACIÓN 2. *El requisito $d^2u \mid M \geqslant 0$ ($d^2 u \mid M_0 \leqslant 0$, respectivamente) es la condición necesaria para que exista un mínimo (máximo) local en el punto M_0 de una función $u = f(M)$ dos veces diferenciable en este punto.*

En efecto, supongamos, para concretar, que $u = f(M)$ tiene en el punto M_0 un mínimo local, pero la condición $d^2u \mid M_0 \geqslant 0$ no está cumplida. Entonces, se encontrarán tales $h_1, h_2, \ldots, h_m$ que

$$d^2u \mid_{M_0} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(M_0)\, h_i h_k < 0$$

Veamos la función $F(t) = f(\overset{\circ}{x}_1 + th_1, \overset{\circ}{x}_2 + th_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m + th_m)$, definida a ciencia cierta para cualesquiera t suficientemente pequeños en módulo. La función $F(t)$ ha de tener un mínimo local en el punto $t = 0$, lo que está en contradicción con la condición

$$F''(0) = d^2u \mid M_0 < 0.$$

3. Caso de una función de dos variables. En la práctica se encuentra frecuentemente el problema de extremo de una función de dos variables $u = f(x, y)$. En este punto daremos a conocer los resultados referentes al caso dado.

Denotemos las derivadas parciales $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en cierto punto $M_0(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ con los símbolos a_{11}, a_{12}, a_{22} respectivamente. Resulta ser válida la *afirmación* siguiente.

Supongamos que una función de dos variables $u = f(x, y)$, una vez diferenciable en un entorno del punto $M_0(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ y dos veces diferenciable en el propio punto M_0, y admitamos que M_0 es un punto de extremo eventual. Entonces, si en el punto M_0 se cumple la condición $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, la función $u = f(x, y)$ tiene en este punto extremo local (máximo, cuando $a_{11} < 0$, y mínimo, cuando $a_{11} > 0$). En cambio, si en dicho punto M_0 se tiene $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, la función $u = f(x, y)$ no tiene en este punto extremo local *).

DEMOSTRACIÓN. La validez de la primera parte de la afirmación enunciada se deduce directamente del teorema 14.16 y del criterio de Sylvester sobre la forma cuadrática de signo definido, puesto que

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

* El caso de $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ requiere un análisis adicional.

Demostremos la segunda parte de la afirmación. Así, pues, supongamos que en el punto M_0 se cumple la desigualdad $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$. Demostremos que en este caso la segunda diferencial d^2u en el punto M_0 es una forma *de signo variable*. Examinemos, al principio, el caso de $a_{11} \neq 0$. Al hacer uso de las designaciones introducidas anteriormente

$$\rho = \sqrt{(x-\overset{\circ}{x})^2 + (y-\overset{\circ}{y})^2}, \quad h_1 = \frac{x-\overset{\circ}{x}}{\rho}, \quad h_2 = \frac{y-\overset{\circ}{y}}{\rho},$$

obtendremos la expresión siguiente para la segunda diferencial:

$$d^2u\,|_{M_0} = \rho^2 \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} a_{ik}h_ih_k = \rho^2 (a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2) =$$

$$= \frac{\rho^2}{a_{11}} [(a_{11}h_1 + a_{12}h_2)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\, h_2^2].$$

Es fácil comprobar que cuando $h_1 = 1$, $h_2 = 0$, y para $h_1 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}$, $h_2 = -\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}}$ *), la diferencial $d^2u\,|_{M_0}$ tiene signos diferentes, es decir, es una forma de signo variable, por lo cual, de acuerdo con el teorema 14.16, la función no tiene en M_0 un extremo local.

Examinemos ahora el caso de $a_{11} = 0$. De la condición $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ se desprende que $a_{12} \neq 0$. Por consiguiente, de la expresión para $d^2u\,|_{M_0}$, escrita más arriba, se obtiene

$$d^2u\,|_{M_0} = \rho^2h_2\,(2a_{12}h_1 + a_{22}h_2). \tag{5.84}$$

Supongamos que $h_1 \neq 0$ y que la magnitud h_2 es tan pequeña (de la condición $h_1^2 + h_2^2 = 1$ se deduce que semejante elección de h_1 y h_2 es posible) que la expresión $(2a_{12}h_1 + a_{22}h_2)$ conserva invariable el signo de la magnitud $2a_{12}h_1$. Entonces, de la fórmula (5.84) se deduce que $d^2u\,|_{M_0}$ tiene signos diferentes para $h_2 > 0$ y $h_2 < 0$, es decir, la función $u = f(x, y)$ no tiene un extremo local en el punto M_0. La afirmación está completamente demostrada.

4. Ejemplos de análisis del extremo de una función. 1) Hállense los puntos del extremo local de una función de m variables

$$u = \lambda x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 + 2x_2 + \ldots + 2x_m, \tag{5.85}$$

donde λ es un número real distinto de cero.

Para hallar los puntos de extremo eventual obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2\lambda x_1 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_2 + 2 = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x_m} = 2x_m + 2 = 0. \tag{5.86}$$

*) En este caso ρ puede ser una magnitud tan pequeña como se quiera. La condición $h_1^2 + h_2^2 = 1$ está cumplida.

A partir de las ecuaciones (5.86) concluimos que el único punto de extremo eventual es M_0 $(0, -1, \ldots, -1)$.

Con el fin de analizar la función (5.85) en dicho punto M_0 con ayuda de las condiciones suficientes de extremo, calculemos la segunda diferencial

$$d^2u\,|_{M_0} = 2\lambda\,(dx_1)^2 + 2\,(dx_2)^2 + \ldots + 2\,(dx_m)^2. \qquad (5.87)$$

Es obvio que cuando $\lambda > 0$, todos los valores de la segunda diferencial (5.87) son estrictamente positivos para $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ simultáneamente distintos de cero, es decir, cuando $\lambda > 0$, la segunda diferencial (5.87) es una forma cuadrática definida positiva. Por eso, cuando $\lambda > 0$, la función (5.85) tiene un mínimo local en el punto M_0 $(0, -1, \ldots, -1)$.

Cuando $\lambda < 0$, la segunda diferencial (5.87) es positiva para $dx_1 = 0, \ldots, dx_{m-1} = 0$, $dx_m = 1$, y negativa para $dx_1 = 1$, $dx_2 = 0, \ldots, dx_m = 0$. Esto significa que, cuando $\lambda < 0$, la segunda diferencial (5.87) es una forma cuadrática de signo variable. Por eso, cuando $\lambda < 0$, la función (5.85) no tiene un extremo local en el punto M_0 $(0, -1, \ldots, -1)$.

2) En un plano hay n puntos M_k (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, en los cuales están concentradas las masas $m_k > 0$. Se pide hallar en dicho plano un punto M_0 (x_0, y_0) tal que respecto de él el momento de inercia del sistema indicado de puntos materiales sea mínimo.

Por cuanto el momento de inercia del sistema dado de puntos materiales respecto del punto M (x, y) e

$$I\,(x, y) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,[(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2], \qquad (5.88)$$

el problema consiste en hallar el punto M_0 (x_0, y_0), en el cual la función (5.88) alcanza su valor mínimo.

Para hallar los puntos de extremo eventual de la función (5.88) tenemos las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 2\sum_{k=1}^{n} m_k\,(x-a_k) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial y} = 2\sum_{k=1}^{n} m_k\,(y-b_k) = 0. \qquad (5.89)$$

A partir de las ecuaciones (5.89) concluimos que el único punto de extremo eventual de la función (5.88) es M_0 (x_0, y_0), cuyas coordenadas son

$$x_0 = \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y_0 = \frac{m_1b_1 + m_2b_2 + \ldots + m_nb_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (5.90)$$

Por cuanto $a_{11} = \dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} m_k > 0$, $a_{12} = \dfrac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial y} = 0$, $a_{22} = \dfrac{\partial^2 I}{\partial y^2} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} m_k > 0$, tenemos $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, y, de acuerdo con la

afirmación demostrada en el p. 3, la función (5.88) tiene un mínimo local en el punto M_0 (x_0, y_0) con las coordenadas (5.90). Es fácil convencerse de que el valor de $I(x, y)$ en este punto es mínimo. Advirtamos en conclusión que las fórmulas (5.90) determinan las coordenadas del centro de gravedad del sistema de puntos materiales que se considera.

§ 7. Método gradiental de búsqueda del extremo de una función fuertemente convexa

En este párrafo se expone la teoría del método gradiental de búsqueda del extremo de una función fuertemente convexa que es de amplio uso en la práctica.

La idea de este método es extraordinariamente sencilla. Para encontrar aproximadamente los puntos del mínimo de una función de m variables, se emplea el hecho de que la orientación del gradiente de esta función coincide con la dirección de crecimiento máximo de esta función. Por consiguiente, un vector $-\operatorname{grad} f(x_0)$ en todo punto $x_0 = (\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_m)$ está orientado según la dirección de decrecimiento máximo de la función $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Esto nos permite esperar que si, partiendo de cierta aproximación nula $x_0 = (\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_m)$, construimos la k-ésima aproximación $x_k = (\overset{k}{x}_1, \overset{k}{x}_2, \dots, \overset{k}{x}_m)$ con arreglo a la fórmula recurrente

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \operatorname{grad} f(x_k),$$

entonces, para α positivo y suficientemente pequeño, la sucesión de puntos $\{x_k\}$ convergerá hacia el punto del mínimo de la función $f(x)$.

El presente párrafo está dedicado a la realización estricta de esta idea simple.

1. Conjuntos convexos y funciones convexas. Sea $x_1 = (\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \dots, \overset{1}{x}_m)$ y $x_2 = (\overset{2}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \dots, \overset{2}{x}_m)$ dos puntos de un espacio euclídeo m-dimensional E^m, los cuales pueden considerarse como vectores en E^m con las coordenadas correspondientes.

Llamemos *segmento* que une los puntos x_1 y x_2 a un conjunto de puntos del espacio E^m de la forma $x_1 + t(x_2 - x_1)$, donde t es un número cualquiera del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Denotemos el segmento que une los puntos x_1 y x_2 con el símbolo $\overline{x_1 x_2}$.

Definición 1. *Un conjunto Q de puntos del espacio E^m se llama convexo si posee la propiedad siguiente: cualesquiera que sean dos puntos x_1 y x_2, pertenecientes al conjunto Q, el segmento $\overline{x_1 x_2}$ que los une también pertenece a este conjunto.*

Como ejemplo de conjunto convexo en el espacio E^m puede servir una esfera m-dimensional (no importa que sea abierta o cerrada), o bien un semiespacio $x_m \geqslant 0$ (es decir, un conjunto de todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ del espacio E^m, cuya m-ésima coordenada satisface la condición $x_m \geqslant 0$).

Como ejemplo de conjunto Q no convexo puede servir un complemento de la esfera m-dimensional o una esfera m-dimensional, en la cual está suprimido por lo menos un punto.

Sea Q cierto conjunto de puntos del espacio E^m, y sea x cualquier punto fijo de este espacio.

Llamemos *distancia* del punto x al conjunto Q a la cota inferior exacta de las distancias del punto x a toda clase de puntos de dicho conjunto

Denotemos con el símbolo $\rho(x, Q)$ la distancia del punto x al conjunto Q.

Así, pues, por definición,

$$\rho(x, Q) = \inf_{y \in Q} \rho(x, y)$$

Para cualquier conjunto Q del espacio E^m y para todo punto x de este espacio existe una distancia $\rho(x, Q)$*). En particular, si el punto x pertenece al conjunto Q, tenemos $\rho(x, Q) = 0$.

No obstante, en el conjunto Q no siempre existe un punto y tal que se verifique $\rho(x, y) = \rho(x, Q)$.

Así, por ejemplo, si el conjunto Q es una esfera *abierta* m-dimensional, y x es un punto de E^m dispuesto fuera de dicha esfera, en tal conjunto Q no existe un punto y tal que $\rho(x, y) = \rho(x, Q)$ (puesto que para todos los puntos y de la esfera abierta Q se cumple la desigualdad $\rho(x, y) > \rho(x, Q)$).

Si, no obstante, Q contiene un punto y tal que $\rho(x, y) = \rho(x, Q)$, el citado punto y se denomina *proyección del punto x sobre el conjunto Q*.

La proyección del punto x sobre el conjunto Q se denota con el símbolo $P_Q(x)$.

Subrayemos que si el punto x pertenece al conjunto Q, tenemos $P_Q(x) = x$.

Así, pues, la proyección $P_Q(x)$ del punto x sobre el conjunto Q se define mediante una relación

$$\rho(x, P_Q(x)) = \rho(x, Q) = \inf_{y \in Q} \rho(x, y).$$

Cabe destacar que pueden existir varias proyecciones del punto x sobre el conjunto Q. Por ejemplo, si Q es una esfera m-dimensional con centro en el punto x, cualquier punto de Q será proyección del punto x sobre el conjunto Q.

*) Puesto que el conjunto $\rho(x, y)$ para toda clase de y pertenecientes a Q está siempre acotado inferiormente (mediante el número cero, por ejemplo).

Es válido, sin embargo, el lema siguiente.

Lema 1. Si un conjunto Q del espacio E^m es convexo y cerrado, y x es cualquier punto de E^m, existe, y, además, la única proyección del punto x sobre el conjunto Q.

DEMOSTRACIÓN. Al principio demostremos la existencia de *por lo menos una sola* proyección del punto x sobre el conjunto Q. Denotemos con $\rho(x, Q)$ la distancia del punto x al conjunto Q. Por cuanto $\rho(x, Q)$ está definida como cota inferior exacta $\inf_{y \in Q} \rho(x, y)$, se encontrará una sucesión $\{y_n\}$ de puntos del conjunto Q tal que $\rho(x, y_n) \to \to \rho(x, Q)$.

Por definición de límite de una sucesión numérica para cualquier $\varepsilon > 0$, todos los elementos y_n satisfacen, a partir de cierto número, la relación

$$\rho(x, Q) - \varepsilon < \rho(x, y_n) < \rho(x, Q) + \varepsilon.$$

De aquí se deduce que la sucesión $\{y_n\}$ de puntos del espacio E^m está en todo caso acotada y, por eso, en virtud del teorema de Bolzano—Weierstrass (véase p. 2, § 2, cap. 5, en esta sucesión puede seleccionarse una subsucesión convergente $\{y_{k_n}\}$, donde $n = 1, 2, \ldots$ Denotemos con y el límite de la subsucesión $\{y_{k_n}\}$. Por ser el conjunto Q cerrado, el punto y pertenece a este conjunto. Resta probar que

$$\rho(x, y) = \rho(x, Q) = \lim_{n\to\infty} \rho(x, y_{k_n}).$$

Advirtamos que en vista de las desigualdades triangulares $\rho(x, y_{k_n}) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, y_{k_n})$ y $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, y_{k_n}) + \rho(y_{k_n}, y)$, se verifica una relación $|\rho(x, y_{k_n}) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(y, y_{k_n})$. De esta relación y de la convergencia de la subsucesión $\{y_{k_n}\}$ hacia y se desprende que $\lim_{n\to\infty} \rho(x, y_{k_n}) = \rho(x, y)$, es decir, $\rho(x, Q) = = \rho(x, y)$.

De este modo queda demostrada la existencia de por lo menos una proyección del punto x sobre el conjunto Q.

Demostremos ahora que existe *sólo una proyección* del punto x sobre el conjunto Q. Supongamos que existen dos *diferentes* proyecciones y_1 e y_2 del punto x sobre el conjunto Q. Por cuanto Q es un conjunto convexo, todo el segmento $\overline{y_1y_2}$ que une y_1 e y_2 pertenece al conjunto Q. En particular, al conjunto Q le pertenece el punto medio $\frac{y_1+y_2}{2}$ del citado segmento. Cerciorémonos de que *la distancia $\rho\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ del punto x al citado punto medio del segmento $\overline{y_1y_2}$ es estrictamente inferior a la distancia $\rho(x, y_1) = \rho(x, y_2)$.*

Excluyamos del análisis un caso trivial en que $\frac{y_1+y_2}{2} = x$.

En este caso $\rho\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right)=0$, mientras que $\rho(x, y_1) = \rho(x, y_2) > 0$, pues, de lo contrario (es decir, si $\rho(x, y_1) = \rho(x, y_2) = 0$), ambos puntos y_1 e y_2 coincidirían con x y no podrían ser diferentes. Así, pues, en el caso trivial $\frac{y_1+y_2}{2} = x$ la inecuación

$$\rho\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right) < \rho(x, y_1) = \rho(x, y_2) \tag{5.91}$$

es evidente.

Demostremos ahora la inecuación (5.91) para el caso en que $\frac{y_1+y_2}{2} \neq x$.

Haciendo uso de la propiedad del producto escalar de dos vectores en el espacio E^m*), obtendremos la relación

$$\rho^2\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{y_1+y_2}{2} - x, \frac{y_1+y_2}{2} - x\right) =$$
$$= \left(\frac{y_1-x}{2} + \frac{y_2-x}{2}, \frac{y_1-x}{2} + \frac{y_2-x}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(y_1-x, y_1-x) + 2(y_1-x, y_2-x) + (y_2-x, y_2-x)\right]. \tag{5.92}$$

Cerciorémonos ahora de la validez de la inecuación estricta

$$|(y_1-x, y_2-x)| < \sqrt{(y_1-x, y_1-x)}\sqrt{(y_2-x, y_2-x)}. \tag{5.93}$$

Con este fin hagamos uso de que para cualesquiera vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ del espacio E^m, no colineales uno respecto del otro (es decir, tales que $\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{b}$, cualquiera que sea λ real) se cumple la inecuación estricta de Cauchy-Buniakovski**)

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| < \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}, \mathbf{b})}.$$

Esto significa que para demostrar la inecuación (5.93) basta convencerse de que los vectores $y_1 - x$ e $y_2 - x$ no son colineales, es decir, convencerse de que para ningún λ real puede verificarse la igualdad

$$y_1 - x = \lambda(y_2 - x). \tag{5.94}$$

Si la igualdad (14.94) fuera válida para un λ tal que $|\lambda| \neq 1$, sería imposible la igualdad $\rho(y_1, x) = \rho(y_2, x)$.

La validez de la igualdad (5.94) para $\lambda = +1$ contradiría a que los puntos y_1 e y_2 son diferentes.

---

*) Véase, por ejemplo, § 1, cap. 4 del libro *Álgebra lineal* de V. A. Il'in y E. V. Pozniak (en ruso).

**) En efecto, cuando $\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{b}$, el vector $(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$ no es nulo. Por eso, el trinomio cuadrado $(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}, \mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - 2\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \lambda^2(\mathbf{b}, \mathbf{b})$ es estrictamente positivo y su discriminante $4(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b})$ es estrictamente negativo.

Por fin, la validez de la igualdad (5.94) para $\lambda = -1$ significaría que $\frac{y_1+y_2}{2} = x$, lo que se ha excluido del análisis.

Así, pues, la igualdad (5.94) no se verifica, cualquiera que sea λ real, por lo cual la demostración de la desigualdad (5.93) se da por terminada.

Al cotejar la igualdad (5.92) con la desigualdad (5.93), llegamos a que

$$\rho^2\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right) < \frac{1}{4}\Big[(y_1-x,\ y_1-x) + 2\sqrt{(y_1-x,\ y_1-x)(y_2-x,\ y_2-x)} + (y_2-x,\ y_2-x)\Big] = \frac{1}{4}\Big[\sqrt{(y_1-x,\ y_1-x)} + \sqrt{(y_2-x,\ y_2-x)}\Big]^2 = \frac{1}{4}[\rho(x,\ y_1)+\rho(x,\ y_2)]^2 = \rho^2(x,\ y_1) = \rho^2(x,\ y_2).$$

La demostración de la desigualdad (5.91) queda terminada. Pero, esta desigualdad significa que en el conjunto Q hay un punto $\frac{y_1+y_2}{2}$ más próximo a x que los puntos y_1 e y_2, lo que contradice al hecho de que cada uno de los puntos y_1 e y_2 es una proyección del punto x sobre el conjunto Q, es decir, es la cota inferior exacta de la distancia $\rho(x, y)$ para toda clase de y pertenecientes a Q.

La contradicción obtenida señala que la suposición de que existen dos proyecciones diferentes y_1 e y_2 del punto x sobre el conjunto Q es errónea.

La demostración del lema 1 ha concluido.

Pasemos ahora a la definición de función convexa.

Definición 2. *Una función $f(x)$, definida en un conjunto convexo Q del espacio E^m, se denomina convexa hacia las y negativas, o simplemente convexa sobre dicho conjunto, si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 del conjunto Q y para todo número real t del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ se cumple la inecuación*

$$f[x_1 + t(x_2 - x_1)] \leqslant f(x_1) + t[f(x_2) - f(x_1)]. \tag{5.95}$$

Definición 3. *Una función $f(x)$, definida en un conjunto convexo Q del espacio E^m, se denomina estrictamente convexa sobre este conjunto si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 del conjunto Q y para todo número real t del intervalo $0 < t < 1$ se cumple una inecuación estricta*

$$f[x_1 + t(x_2 - x_1)] < f(x_1) + t[f(x_2) - f(x_1)]. \tag{5.96}$$

Está claro que toda función $f(x)$, estrictamente convexa en el conjunto Q, es convexa en este conjunto.

Es fácil establecer la condición suficiente de convexidad (de convexidad estricta, respectivamente) de la función $f(x)$ dos veces diferenciable sobre el conjunto convexo Q.

En lo que sigue más adelante siempre supondremos que el conjunto Q tiene por lo menos un punto interior.

Lema 2. *Supongamos que una función $f(x)$ está definida y es dos veces diferenciable sobre el conjunto convexo Q. Entonces, para que esta función sea convexa (estrictamente convexa) sobre Q, es suficiente que la segunda diferencial $d^2 f$ de esta función en todos los puntos de Q sea una forma cuadrática definida casi positiva (definida estrictamente positiva).*

DEMOSTRACIÓN. Sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos fijos del conjunto Q. Veamos en el segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ la siguiente función de una variable independiente t:

$$F(t) = f[x_1 + t(x_2 - x_1)] - f(x_1) - t[f(x_2) - f(x_1)]. \tag{5.97}$$

Recordemos que la segunda diferencial $d^2 f$ de la función $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de m variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en un punto dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es *)

$$d^2 f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_k. \tag{5.98}$$

Al diferenciar la función (5.97) dos veces respecto de t según la regla de diferenciación de una función compuesta, obtendremos

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}[x_1 + t(x_2 - x_1)](\overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i)(\overset{2}{x}_k - \overset{1}{x}_k), \tag{5.99}$$

donde $(\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \ldots, \overset{1}{x}_m)$ y $(\overset{2}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{2}{x}_m)$ son las coordenadas de los puntos x_1 y x_2, respectivamente.

Al cotejar las relaciones (5.98) y (5.99), nos convencemos de validez de la igualdad

$$F''(t) = d^2 f[x_1 + t(x_2 - x_1)], \tag{5.100}$$

donde en la expresión para $d^2 f$ los incrementos Δx_i se han tomado iguales a $\overset{2}{x}_i - \overset{1}{x}_i$.

Realicemos, los razonamientos posteriores, para concretar, para el caso en que la segunda diferencial $d^2 f$ en todos los puntos de Q es una forma cuadrática definida casi positiva. En este caso, para todo t del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$, el segundo miembro (y, por lo tanto, el primero) de (5.100) es no negativo, es decir, para todo t del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$F''(t) \geqslant 0. \tag{5.101}$$

*) Véase el p. 2, § 5, cap. 5.

En virtud de la definición 2 y la relación (5.97), basta demostrar que para todo t del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ se cumple la inecuación

$$F(t) \leqslant 0. \qquad (5.102)$$

Para demostrar la inecuación (5.102) hagamos uso de la relación (14.101) y las igualdades fáciles de comprobar

$$F(0) = 0, \ F(1) = 0. \qquad (5.103)$$

Supongamos que en el interior del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ existe por lo menos un punto t, en el cual $F(t) > 0$. Entonces, la función $F(t)$ alcanza su valor máximo en el segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ en cierto punto interior t_0 de dicho segmento, con la particularidad de que $F(t_0) > 0$. En este punto t_0 la función $F(t)$ tiene un máximo local, y, por eso, $F'(t_0) = 0$. Pero, de la inecuación (5.101) se deduce que la derivada $F'(t)$ no decrece en todo el segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$, y, por lo tanto, también en el segmento $t_0 \leqslant t \leqslant 1$. De aquí y de la condición $F'(t_0) = 0$ se infiere que la derivada $F'(t)$ es no negativa en todo punto del segmento $t_0 \leqslant t \leqslant 1$, y, por eso, la función $F(t)$ no decrece en este segmento. Esto nos lleva a la inecuación

$$F(1) \geqslant F(t_0) > 0,$$

que contradice a la segunda relación de (5.103).

La contradicción obtenida demuestra que la suposición de que en el segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ existe por lo menos un punto t, en el cual $F(t) > 0$, es errónea, esto es, demuestra la validez de la inecuación (5.102) en todo punto del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Con esto queda demostrada la primera parte del lema (sobre la convexidad de $f(x)$ a condición de que d^2f sea una forma cuadrática definida casi positiva).

La segunda parte del lema (sobre la convexidad estricta de $f(x)$ a condición de que d^2f sea una forma cuadrática definida estrictamente positiva) se demuestra de un modo análogo. Partiendo de la inecuación (5.101), válida esta vez con el signo $>$, y de las inecuaciones (5.103), supuniendo que en el interior del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ existe por lo menos un punto t, en el cual $F(t) \geqslant 0$, deduciremos que $F(t)$ tiene en el interior del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ un punto de máximo local t_0; además, $F(t_0) \geqslant 0$. Mas, en tal caso, siendo $F'(t_0) = 0$, de (5.101) obtenemos que $F'(t) > 0$ en todo punto del semiintervalo $t_0 < t \leqslant 1$, lo que significa que $F(1) > F(t_0) \geqslant 0$.

De nuevo obtenemos una contradicción con la segunda relación de (5.103), la que demuestra que $F(t) < 0$ en todo punto del intervalo $0 < t < 1$, es decir, demuestra la convexidad estricta de $f(x)$ sobre el conjunto Q.

El lema 2 está completamente demostrado.

El lema demostrado conduce, naturalmente, a la idea de exami-

nar la clase siguiente, más estrecha todavía, de funciones convexas en un conjunto convexo Q y dos feces diferenciables en el mismo.

Definición 4. *Una función $f(x)$ dos veces diferenciable en el conjunto convexo Q, se denomina fuertemente convexa en dicho conjunto si existe dos constantes positivas k_1 y k_2 tales que la segunda diferencial d^2f de esta función definida mediante la relación* (5.98) *satisface en todos los puntos x del conjunto Q las inecuaciones*

$$k_1\cdot(\Delta x)^2 \leqslant d^2 f \leqslant k_2\cdot(\Delta x)^2. \qquad (5.104)$$

(En estas inecuaciones Δx designa un vector con las coordenadas $(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$, y el símbolo $(\Delta x)^2$ denota el cuadrado escalar del vector mencionado.)

De la inecuación izquierda (5.104) se deduce inmediatamente que la segunda diferencial de una función fuertemente convexa es una función definida estrictamente positiva en todos los puntos del conjunto Q, y, por eso, (en virtud del lema 2) *una función convexa sobre el conjunto Q es a ciencia cierta estrictamente convexa en dicho conjunto.*

Además, la clase de funciones fuertemente convexas es bastante amplia e importante en los problemas aplicados y nos limitamos a esta clase al exponer la teoría del método gradiental de búsqueda de un mínimo.

Empecemos aclarando la cuestión de existencia y de unicidad del mínimo.

2. Existencia del mínimo de una función fuertemente convexa y unicidad del mínimo de una función estrictamente convexa. Supongamos que una función $f(x)$ está definida sobre un conjunto convexo Q. Diremos que esta función tiene en un punto x_0 del conjunto Q un *mínimo local* si existe un δ-entorno de este punto x_0 tal que el valor $f(x_0)$ es el mínimo entre los valores de esta función en todos los puntos de intersección del δ-entorno de x_0 con el conjunto Q.

Admitida esta definición, el concepto de mínimo local incluye también los puntos del mínimo de contorno de la función $f(x)$ en la frontera del conjunto Q.

De este modo, teniendo presente la definición dada, podemos subdividir los puntos de mínimo en puntos de mínimo local interior (cuando dichos puntos son puntos interiores de Q) y puntos de mínimo local de contorno (cuando estos puntos son puntos de frontera de Q).

Para estudiar el problema de existencia y unicidad de un punto de mínimo local nos hará falta el siguiente teorema auxiliar.

Lema 3. *Supongamos que en un conjunto convexo Q viene dada una función convexa diferenciable $f(x)$. Para que esta función tenga un mínimo local en el punto x_0 del conjunto Q, es necesario y suficiente que para cualquier vector Δx, para el cual el punto $x_0 + \Delta x$ pertenece al*

conjunto Q, se cumpla la inecuación *) *que sigue*

$$(\text{grad}\, f(x_0),\ \Delta x) \geqslant 0. \qquad (5.105)$$

DEMOSTRACIÓN. 1) NECESIDAD En virtud de la afirmación demostrada en el p. 6, § 4, cap. 5, el primer miembro de (5.105) es igual al producto de la derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 según la dirección del vector Δx por la longitud $|\Delta x|$ de este vector:

$$(\text{grad}\, f(x_0),\ \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial e}(x_0)|\Delta x|, \qquad (14.106)$$

donde $e = \frac{\Delta x}{|\Delta x|}$ es el vector unidad en dirección de Δx.

Por cuanto x_0 es el punto de mínimo local de la función $f(x)$, la derivada $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ según cualquier dirección de $e = \frac{\Delta x}{|\Delta x|}$ es no negativa (con mayor precisión, es igual a cero cuando x_0 es un punto de extremo local interior, y no negativa cuando x_0 es un punto de extremo local de contorno).

Así, pues, el segundo miembro de (5.106) (y, por eso, también el primer miembro de (5.105)) es no negativo. La necesidad está demostrada.

2) SUFICIENCIA. Supongamos que para todo vector Δx, para el cual el punto $x_0 + \Delta x$ pertenece a Q, se cumple la inecuación (5.105). Demostremos que el punto x_0 es un punto de mínimo local de la función $f(x)$.

Por cuanto la función $f(x)$ es, de acuerdo con la hipótesis, convexa sobre el conjunto Q, para cualesquiera dos puntos x_1 o x_2 de dicho conjunto y cualquier número t del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ se cumple la desigualdad (5.95). Al suponer en esta desigualdad $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + \Delta x$, podemos escribir esta desigualdad en la forma

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant \frac{f(x_0 + t\Delta x) - f(x_0)}{t}. \qquad (5.107)$$

Considerando fijos x_0 y Δx, pasemos en la desigualdad (5.107) al límite para $t \to 0 + 0$. Por definición de la derivada direccional (véase p. 6, § 4, cap. 5), el límite del segundo miembro de (5.107) para $t \to 0 + 0$ es exactamente igual al producto del segundo miembro de (5.106). Por eso, en virtud de las relaciones (5.105) y (5.106), este límite es no negativo. Considerando que el primer miembro de (5.107) no depende de t, de la (5.107), en límite para $t \to 0 + 0$ inecuación se infiere que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant 0.$$

*) En la inecuación (5.105) se toma el producto escalar de los vectores grad $f(x_0)$ y Δx. Véase en el p. 6, § 4, cap. 5 la definición de grad $f(x_0)$.

La última desigualdad, lícita para cualquier vector Δx, para el cual el punto $x_0 + \Delta x$ pertenece a Q, demuestra que la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 un mínimo local. La suficiencia está demostrada.

El lema 3 está completamente demostrado.

OBSERVACIÓN 1. La demostración aducida evidencia que para el caso en que x_0 es un punto *interior* del conjunto Q, es decir, cuando se trata de un mínimo local interior, en la formulación del lema 3 el signo $\geqslant$ de la inecuación (5.105) puede ser cambiado por el signo $=$.

OBSERVACIÓN 2. Al demostrar la necesidad del lema 3, no hemos recurrido a la exigencia de convexidad de la función $f(x)$. Por eso la necesidad se demuestra sin la exigencia de que la función $f(x)$ sea convexa. De otras palabras, es válida la *afirmación siguiente: si una función $f(x)$ es diferenciable en un conjunto convexo Q y tiene un mínimo local en el punto interior (de frontera) x_0 de dicho conjunto, para cualquier vector Δx, en cuyo caso el punto $x_0 + \Delta x$ pertenece a Q, se cumple la desigualdad*

$$(\text{grad}\, f(x_0), \Delta x) = 0 \ [(\text{grad}\, f(x_0), \Delta x) \geqslant 0].$$

Pasemos a la cuestión de unicidad y existencia de un punto de mínimo local.

***Teorema** (de la unicidad del mínimo local de una función estrictamente convexa). Si una función $f(x)$ es diferenciable y estrictamente convexa sobre un conjunto convexo Q, puede tener un mínimo local solamente en un único punto de este conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $f(x)$ tiene un mínimo local en dos puntos *diferentes* x_1 y x_2 del conjunto Q. Entonces, la condición de convexidad (5.95) para los puntos x_1 y x_2 puede escribirse en la forma

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant \frac{f[x_1 + t(x_2 - x_1)] - f(x_1)}{t} \qquad (5.108)$$

(aquí, t es un número cualquiera del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$).

Al cambiar de papel los puntos x_1 y x_2 en la relación (5.108), obtendremos la inecuación

$$f(x_1) - f(x_2) \geqslant \frac{f[x_2 + t(x_1 - x_2)] - f(x_2)}{t}. \qquad (5.109)$$

Al pasar en límite para $t \to 0 + 0$, el segundo miembro en (5.108) (en el segundo miembro de (5.109), respectivamente) proporciona la derivada de la función $f(x)$ según la dirección del vector $x_2 - x_1$ (del vector $x_1 - x_2$, respectivamente), tomada en el punto x_1 (en el punto x_2, respectivamente), multiplicada por $|x_2 - x_1|$. Por cuanto ambos puntos x_1 y x_2 son puntos de mínimo local, ambas derivadas direccionales citadas son no negativas, es decir, los límites de los segundos miembros de (5.108) y (5.109) para $t \to 0 + 0$ ambos son no negativos.

De este modo, de las desigualdades (5.108) y (5.109) obtenemos en límite para $t \to 0+0$:

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0, \quad f(x_1) - f(x_2) \geqslant 0.$$

La comparación de las últimas desigualdades nos conduce a la conclusión de que $f(x_1) = f(x_2)$.

Haciendo uso de la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$, obtendremos, partiendo de la condición de convexidad estricta (5.96), que

$$f[x_1 + t(x_2 - x_1)] < f(x_1) \tag{5.110}$$

para *todo* t del intervalo $0 < t < 1$.

La desigualdad (5.110) contradice al hecho de que la función $f(x)$ tiene un mínimo local en el punto x_1 (en el punto $x_1 + t(x_2 - x_1)$, tan próximo como se quiera al punto x_1 para t pequeño, la función $f(x)$ tiene un valor inferior al de $f(x_1)$).

La contradicción obtenida muestra que nuestra suposición de que la función $f(x)$ tiene un mínimo local en dos puntos diferentes del conjunto Q es errónea. El teorema está demostrado.

Demostremos la existencia de un mínimo local para unas restricciones más rigurosas que las adoptadas al demostrar la unicidad.

Teorema (de la existencia de un mínimo local de una función). *Si una función $f(x)$ es fuertemente convexa sobre un conjunto cerrado convexo Q, dicha función tiene en el conjunto Q un punto x_0 de* mínimo local*).

DEMOSTRACIÓN. Notemos, al principio, que el teorema es a ciencia cierta válido para el caso en que el conjunto cerrado convexo Q es, además, *acotado*. Entonces, de acuerdo con el segundo teorema de Weierstrass (véase teorema 5.7), la función $f(x)$, siendo en todo caso continua sobre el conjunto Q, alcanza en cierto punto x_0 de dicho conjunto su valor mínimo en Q. Este punto x_0 será precisamente el punto de mínimo local.

Resta demostrar el teorema para el caso cuando el conjunto cerrado convexo Q *no está acotado*. Fijemos cierto punto interior x_1 del conjunto Q y desarrollemos la función $f(x)$ según la fórmula de Taylor con centro en el punto x_1, tomando el término residual $R_2(x)$ en forma de Lagrange **) (véase p. 3, § 5, cap. 5). El desarrollo citado tendrá la forma:

$$f(x) = f(x_1) + df(x_1) + \frac{1}{2} d^2 f[x_1 + \theta(x - x_1)] \tag{5.111}$$

---

*) Por cuanto la función $f(x)$, fuertemente convexa sobre un conjunto convexo Q, es estrictamente fuerte en dicho conjunto, de acuerdo con el teorema anterior, el punto x_0 será el *único* punto de mínimo local.

**) Tenemos en cuenta que la función $f(x)$, fuertemente convexa en el conjunto Q, es dos veces diferenciable en este conjunto.

donde θ es un número del intervalo $0 < \theta < 1$, de suerte que el punto $x_1 + \theta (x - x_1)$ pertenece al segmento que une los puntos x_1 y x^*).

Si designamos con Δx el vector $x - x_1$, para $df(x_1)$ se verificará la igualdad

$$df(x_1) = (\text{grad } f(x_1), \Delta x).$$

De esta igualdad se deduce que

$$|df(x_1)| \leqslant |\text{grad } f(x_1)| \cdot |\Delta x| \tag{5.112}$$

Ahora, aprovechando la desigualdad izquierda en la definición de convexidad fuerte (5.104), llegaremos a la desigualdad

$$d^2 f[x_1 + \theta (x - x_1)] \geqslant k_1 \cdot (\Delta x)^2. \tag{5.113}$$

De las relaciones (5.111)—(5.113) concluimos que

$$f(x) - f(x)_1 \geqslant -|df(x_1)| + \frac{1}{2} d^2 f[x_1 + \theta (x - x_1)] \geqslant$$

$$\geqslant -|\text{grad } f(x_1)| \cdot |\Delta x| + \frac{k_1}{2} |\Delta x|^2,$$

de suerte que

$$f(x) - f(x_1) \geqslant |\Delta x| \cdot \left[\frac{k_1}{2} |\Delta x| - |\text{grad } f(x_1)|\right]. \tag{5.114}$$

Considerando que el punto x_1 es fijo y la magnitud $|\text{grad } f(x_1)|$ es cierto número fijo, podemos a ciencia cierta elegir un número positivo R tan grande que para $|\Delta x| > R$ la expresión encerrada entre corchetes en (5.114) será positiva.

Esto significa que, cuando $|\Delta x| > R$, se cumple la desigualdad $f(x) > f(x_1)$, es decir, fuera de una esfera cerrada C_R de radio R con centro en el punto x_1 los valores de $f(x)$ sobrepasan el valor de $f(x_1)$ (en el centro de la esfera mencionada).

Denotemos con Q_R la intersección del conjunto Q con dicha esfera C_R. Por cuanto ambos conjuntos, Q y C_R, son convexos y cerrados, su intersección Q_R será también convexa y cerrada. Además, puesto que el conjunto Q_R es acotado, entonces, de conformidad con lo demostrado más arriba, la función $f(x)$ tiene en Q_R el único punto x_0 de mínimo local.

Teniendo en cuenta lo demostrado acerca de que en todo punto de Q, dispuesto fuera de los márgenes de Q_R, los valores de $f(x)$ son superiores a los de $f(x_1)$, estos valores con mayor razón son superiores a $f(x_0)$, es decir, el punto x_0 es punto de mínimo local de $f(x)$ tam-

*) Cualquiera que sea el punto x del conjunto Q, el segmento que une los puntos x y x_1 pertenece al conjunto Q, por ser dicho conjunto convexo. En la nota al pie de la página para el teorema de Taylor (5.15) se ha observado que a título de entorno del centro de desarrollo puede tomarse cualquier entorno estelar, es decir, puede tomarse todo el conjunto Q.

bién sobre todo el conjunto Q. El teorema está completamente demostrado.

3. **Búsqueda del mínimo de una función fuertemente convexa.** Se ha demostrado que una función fuertemente convexa $f(x)$, definida sobre un conjunto cerrado convexo Q, tiene en este conjunto un único punto x_0 de mínimo local.

Volvamos a la construcción y argumentación del algoritmo, con cuya ayuda se busca este punto x_0.

Fijemos un punto arbitrario x_1 del conjunto Q y un número arbitrario α que satisface las desigualdades

$$0 < \alpha < 2k_2, \tag{5.115}$$

donde k_2 es la constante de la desigualdad (5.104) que determina la convexidad fuerte de la función $f(x)$.

Considerando x_1 como la primera aproximación, formemos una sucesión iterativa $\{x_k\}$ con ayuda de una relación recurrente

$$x_{k+1} = P_Q(x_k - \alpha \operatorname{grad} f(x_k)), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.116}$$

En el presente punto demostremos la afirmación siguiente.

Teorema fundamental. *Supongamos que la función $f(x)$ es fuertemente convexa sobre el conjunto cerrado convexo Q y sea x_0 un punto arbitrario del conjunto Q. Entonces, la sucesión iterativa $\{x_k\}$, definida mediante la relación recurrente* (5.116), *converge hacia el punto x_0 de mínimo local de la función $f(x)$, cualquiera que sea α que satisface las igualdades* (5.**115**).

Recalquemos que este teorema nos ofrece el algoritmo para hallar cualquier mínimo local (interior o de contorno) de la función $f(x)$ fuertemente convexa sobre todo conjunto arbitrario cerrado y convexo Q (no es preciso que esté acotado).

Antes de demostrar el teorema fundamental aduciremos cuatro lemas.

Lema 4. *Si Q es un conjunto cerrado convexo de puntos en E^m, y x es un punto fijo arbitrario de E^m, siendo y un punto arbitrario de Q, entonces*

$$(x - P_Q(x), y - P_Q(x)) \leqslant 0. \tag{5.117}$$

Demostración. Supongamos que la desigualdad (5.117) no es cierta. Entonces, existe un punto y del conjunto Q tal que

$$(x - P_Q(x), \; y - P_Q(x)) > 0. \tag{5.118}$$

De (5.118) se desprende en seguida que el punto y no coincide con $P_Q(x)$.

Por ser el conjunto Q convexo, cualquier punto $z = P_Q(x) + t(y - P_Q(x))$ del segmento que une los puntos $P_Q(x)$ e y, pertenece al conjunto Q. Calculemos la distancia entre cualquier

punto de este género z y el punto x

$$\rho^2(z, x) = (x - P_Q(x) - t(y - P_Q(x)),\ x - P_Q(x) - \\ - t(y - P_Q(x))) = \rho^2(x, P_Q(x)) - 2t(x - P_Q(x), \\ y - P_Q(x)) + t^2\rho^2(y, P_Q(x)). \quad (5.119)$$

Por cuanto x e y son fijos y t es cualquier número del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$, entonces, en virtud de las desigualdades (5.118), podemos elegir un t tal que satisfará la desigualdad

$$0 < t < \frac{2(x - P_Q(x),\ y - P_Q(x))}{\rho^2(y,\ P_Q(x))}.$$

Eligiendo t de tal manera, obtenemos

$$-2t(x - P_Q(x),\ y - P_Q(x)) + t^2\rho^2(y,\ P_Q(x)) < 0,$$

y deducimos de (5.119) que $\rho^2(z, x) < \rho^2(x, P_Q(x))$. La última desigualdad contradice o que el punto $P_Q(x)$ es una proyección del punto x sobre el conjunto Q: en el conjunto Q hay un punto z que está alejado de x a una distancia inferior a la que existe entre $P_Q(x)$ y x. La contradicción obtenida finaliza la demostración del lema.

Lema 5. Supongamos que $f(x)$ es diferenciable y convexa en un conjunto cerrado convexo Q. Si para cierto α positivo la proyección $P_Q(x_0 - \alpha\cdot\text{grad}\ f(x_0))$ del punto $x_0 - \alpha\cdot\text{grad}\ f(x_0)$ sobre el conjunto Q coincide con el punto x_0 de este conjunto, la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 un mínimo local.

DEMOSTRACIÓN. Haciendo uso del lema 4, escribamos la desigualdad (5.117) para los puntos $x = x_0 - \alpha\cdot\text{grad}\ f(x_0)$ e $y = x_0 + \Delta x$, donde Δx es cualquier vector, para el cual el punto $y = x_0 + \Delta x$ pertenece a Q. Como resultado obtenemos:

$$(x_0 - \alpha\cdot\text{grad}\ f(x_0) - P_Q(x_0 - \alpha\cdot\text{grad}\ f(x_0)), \\ x_0 + \Delta x - P_Q(x_0 - \alpha\cdot\text{grad}\ f(x_0))) \leqslant 0.$$

Considerando que $P_Q(x_0 - \alpha\cdot\text{grad}\ f(x_0)) = x_0$, obtenemos de la última desigualdad la relación siguiente:

$$(\text{grad}\ f(x_0),\ \Delta x) \geqslant 0.$$

Esta relación, válida para cualquier vector Δx, para el cual el punto $x_0 + \Delta x$ pertenece a Q, establece, en virtud del lema 3, que la función $f(x)$ tiene en el punto x_0 un mínimo local. El lema 5 está demostrado.

Supongamos que la función $f(x)$ es fuertemente convexa sobre un conjunto convexo cerrado y acotado Q. Denotemos con m el valor mínimo de $f(x)$ sobre el conjunto Q y con μ, un número estrictamente superior a m, de suerte que

$$\mu > m = \min_{x \in Q} f(x).$$

Fijamos un número ν, estrictamente superior a μ, y denotemos con $\hat{Q}$ un subconjunto de aquellos puntos x del conjunto Q, para los cuales

$$\mu \leqslant f(x) \leqslant \nu \tag{5.120}$$

El conjunto $\hat{Q}$, siendo un subconjunto del conjunto acotado Q, es acotado de por sí.

Cerciorémonos de que el conjunto $\hat{Q}$ es *cerrado*. Sea $\{x_k\}$ una sucesión convergente arbitraria de puntos del conjunto $\hat{Q}$. Se pide demostrar que el límite x_0*) de esta sucesión también pertenece al conjunto $\hat{Q}$. Por cuanto cada punto x_k pertenece al conjunto $\hat{Q}$, tenemos para todo número k

$$\mu \leqslant f(x_k) \leqslant \nu. \tag{5.121}$$

La función estrictamente convexa $f(x)$ es en todo caso continua en Q, y, por eso, dado que la sucesión $\{x_k\}$ converge hacia x_0 se deduce, en virtud de la definición de continuidad de una función, la convergencia de la sucesión $\{f(x_k)\}$ hacia el número $f(x_0)$. Por cuanto todos los elementos de la sucesión numérica convergente $\{f(x_k)\}$ satisfacen las desigualdades (5.121), el límite $f(x_0)$ de esta sucesión también satisface las inecuaciones $\mu \leqslant f(x_0) \leqslant \nu$ (véase cap. 3, corolario 2 del teorema 3.13, t. 1). Precisamente esto último significa que el punto x_0 pertenece al conjunto $\hat{Q}$. Hemos demostrado, pues, el carácter cerrado del conjunto $\hat{Q}$.

Así, pues, el conjunto $\hat{Q}$ de todos los puntos x del conjunto Q, para los cuales son válidas las desigualdades (5.120), es cerrado y acotado.

Demostremos el lema siguiente.

Lema 6. *Supongamos que la función $f(x)$ es fuertemente convexa en un conjunto cerrado convexo Q; x es un punto cualquiera de Q y α, cualquier número positivo; el símbolo Δx denota la diferencia*

$$\Delta x = P_Q(x - \alpha \cdot \operatorname{grad} f(x)) - x. \tag{5.122}$$

Entonces se cumple la desigualdad

$$(\operatorname{grad} f(x),\ \Delta x) \leqslant -\frac{1}{\alpha} |\Delta x|. \tag{5.123}$$

Si, además, el conjunto Q es acotado y el punto x pertenece al subconjunto $\hat{Q}$ de aquellos puntos de Q, para los cuales se cumplen las desigualdades (5.120) *cuando* $\mu > \min f(x)$, *se encontrará un número estric-*

*) Por cuanto el conjunto de partida Q es cerrado, el límite x_0 en todo caso pertenece a Q.

tamente positivo y tal que se cumple la desigualdad

$$|\Delta x| \geqslant \gamma. \qquad (5.124)$$

DEMOSTRACION. Demostremos primero la desigualdad (5.123). Fijemos arbitrariamente un punto x del conjunto Q y, recurriendo al lema 4, escribamos la desigualdad (5.117), tomando en la misma en lugar de x un punto $x - \alpha \cdot \mathrm{grad}\, f(x)$, y en lugar de y, el punto x. Obtendremos la desigualdad

$$(x - \alpha \cdot \mathrm{grad}\, f(x) - P_Q(x - \alpha \cdot \mathrm{grad}\, f(x)),\ x - P_Q(x - \alpha \cdot \mathrm{grad}\, f(x))) \leqslant 0,$$

la cual, considerando las designaciones $\Delta x = P_Q(x - \alpha \cdot \mathrm{grad} \times f(x)) - x$, se escribirá en la forma

$$(-\alpha \cdot \mathrm{grad}\, f(x) - \Delta x,\ -\Delta x) \leqslant 0.$$

De la última desigualdad y de las propiedades del producto escalar se deduce que

$$\alpha\,(\mathrm{grad}\, f(x),\ \Delta x) + |\Delta x|^2 \leqslant 0,$$

lo que nos conduce a la desigualdad (5.123).

Queda por demostrar que bajo un supuesto adicional de que Q es acotado y que x pertenece al subconjunto $\hat{Q}$, existe $\gamma > 0$ tal que se cumple la desigualdad (5.124).

Veamos una función no negativa del punto x de la forma

$$|\Delta x| = |P_Q(x - \alpha \cdot \mathrm{grad}\, f(x)) - x|. \qquad (5.125)$$

Cerciorémonos de que esta función es función del punto x, continua sobre el conjunto Q.

Demostremos al principio que la función vectorial $P_Q(x)$ es una función continua del punto x. Con este fin basta probar la desigualdad

$$|P_Q(x + \Delta x) - P(x)| \leqslant |\Delta x|, \qquad (5.126)$$

que se cumple para cualesquiera vectores x y Δx.

En virtud del lema 4, son válidas las desigualdades

$$(x - P_Q(x),\ P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) \leqslant 0,$$

$$(x + \Delta x - P_Q(x + \Delta x),\ P_Q(x) - P_Q(x + \Delta x)) \leqslant 0.$$

Haciendo uso de estas desigualdades y de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, obtendremos una cadena de relaciones

$$|P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)|^2 =$$
$$= (P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x),\ P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) =$$
$$= (P_Q(x + \Delta x) - x,\ P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) +$$
$$+ (x - P_Q(x),\ P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) \leqslant$$
$$\leqslant (P_Q(x + \Delta x) - x,\ P_Q(x + \Delta x) - P_Q(x)) =$$

$$= (P_Q(x+\Delta x) - x - \Delta x,\ P_Q(x+\Delta x) - P_Q(x)) + (\Delta x,\ P_Q(x+\Delta x) - P_Q(x)) \leqslant (\Delta x,\ P_Q(x+\Delta x) - P_Q(x)) \leqslant |\Delta x| \cdot |P_Q(x+\Delta x) - P_Q(x)|,$$

de la cual se deduce la desigualdad (5.126).

Se ha demostrado, pues, que $P_Q(x)$ es una función vectorial continua del punto x. De la convexidad fuerte de $f(x)$ en Q proviene que $\alpha\cdot\operatorname{grad} f(x)$ es también una función vectorial continua en Q del punto x. Mas, en tal caso, del teorema de continuidad de una función compuesta y de la continuidad de la diferencia de las funciones continuas se desprende que la función

$$P_Q(x - \alpha\cdot\operatorname{grad} f(x)) - x$$

es en Q una función vectorial continua del punto x.

El módulo de la citada función vectorial, es decir, la función escalar (5.125) es con mayor razón continua sobre el conjunto Q y, por eso, sobre el subconjunto $\hat{Q}$ del mismo.

Así, pues, la función (5.125) es continua y no negativa en todo punto sobre el conjunto acotado cerrado $\dot{Q}$. En este caso, de acuerdo con el segundo teorema de Weierstrass (véase teorema 5.7), esta función alcanza en el conjunto $\hat{Q}$ su valor mínimo no negativo γ. El valor mínimo mencionado γ es a ciencia cierta estrictamente positivo, pues, si γ fuera igual a cero, en el conjunto $\hat{Q}$ se encontraría un punto x_0 tal que $P_Q(x_0 - \alpha\cdot\operatorname{grad} f(x_0)) - x_0 = 0$, y esto significaría, en virtud del lema 5, que en este punto x_0 del conjunto $\hat{Q}$ la función $f(x)$ tiene sobre el conjunto Q un único mínimo local (este mínimo se dispone, por definición de $\dot{Q}$, fuera de $\hat{Q}$). El lema 6 queda completamente demostrado.

Lema 7. *Supongamos que una función $f(x)$ es fuertemente convexa sobre un conjunto cerrado convexo Q; x es un punto cualquiera de Q; α es cualquier número que satisface las desigualdades* (5.115); *Δx es la diferencia de tipo* (5.122). *Entonces, al pasar del punto x al punto $x^* = P_Q(x - \alpha\cdot\operatorname{grad}\cdot f(x))$, el valor de la función $f(x)$ no crece, con la particularidad de que* *)

$$f(x) - f(x^*) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) |\Delta x|^2. \qquad (5.127)$$

Si, además, el conjunto Q está acotado y el punto x pertenece al subconjunto $\hat{Q}$ de aquellos puntos de Q, para los cuales se cumple la desigualdad (5.120) *cuando $\mu > \min\limits_{x\in Q} f(x)$, la desigualdad* (5.127) *se convierte*

---

*) De (5.115) se deduce que $\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) > 0$.

en una desigualdad

$$f(x)-f(x^*)\geqslant\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{k_2}{2}\right)\gamma^2. \qquad (5.128)$$

donde $\gamma>0$ es la constante del lema 6.

DEMOSTRACIÓN. Basta establecer para cualquier punto x del conjunto Q la desigualdad (5.127), pues de esta desigualdad y de la (5.124) se deduce en seguida la desigualdad (5.128) (para los puntos x pertenecientes a $\hat{Q}$, a condición de que Q esté acotado).

Demostremos al principio la desigualdad (5.127) para un caso en que el punto x es punto *interior* del conjunto Q. Considerando que el punto $x^*=P_Q(x-\alpha\cdot\text{grad } f(x))$ pertenece al conjunto Q, sobre el cual la función $f(x)$ es fuertemente convexa, expresemos el valor $f(x^*)$ según la fórmula de Taylor con centro en el punto x, tomando el término residual $R_2(x^*)$ en forma de Lagrange. En este caso obtenemos

$$f(x^*)=f(x)+(\text{grad } f(x),\ \Delta x)+\frac{1}{2}d^2f(x+\theta\Delta x), \qquad (5.129)$$

donde $\Delta x=x^*-x=P_Q(x-\alpha\cdot\text{grad } f(x))-x$, $0<\theta<1$.

Utilizando la desigualdad (5.123) y la desigualdad derecha de (5.104), de la fórmula de Taylor (5.129) obtenemos

$$f(x^*)-f(x)\leqslant-\frac{1}{\alpha}\ |\Delta x|^2+\frac{k_2}{2}\cdot|\Delta x|^2,$$

de modo que para el caso de un punto interior x la desigualdad (5.127) queda demostrada.

Sea, ahora x un punto *de frontera* del conjunto Q. Por definición de punto de frontera, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos interiores del conjunto Q que converge hacia x.

Para todo punto x_n obtenemos, rigiéndonos por la fórmula de Taylor con centro en dicho punto:

$$f(x^*)=f(x_n)+(\text{grad } f(x_n),\ x^*-x_n)+\frac{1}{2}d^2f\times$$
$$\times[x_n+\theta_n(x^*-x_n)], \qquad (5.130)$$

donde $0<\theta_n<1$.

Teniendo en cuenta que la desigualdad derecha de (5.104) es válida para d^2f en cualquier punto del conjunto Q y que grad $f(x)$ es una función vectorial continua del punto x sobre el conjunto Q, llegamos a que en límite, para $n\to\infty$, de la relación (5.130) se deduce la validez de la desigualdad (5.127) para el punto de frontera x del conjunto Q.

El lema está demostrado.

Pasemos ahora directamente a la demostración del teorema fundamental.

Demostremos primero el teorema fundamental suponiendo adicionalmente que un conjunto cerrado convexo Q es también *acotado.*

Tomemos un punto arbitrario x_1 del conjunto Q y formemos una sucesión iterativa $\{x_n\}$ de puntos definidos mediante la relación recurrente (5.116), a condición de que α satisfaga las desigualdades (5.115).

Del lema 7, y, con mayor precisión, de la desigualdad (5.127) proviene en seguida que

$$f(x_k)-f(x_{k+1})\geqslant\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{k_2}{2}\right)\cdot|x_k-x_{k+1}|^2\geqslant 0.$$

De este modo, la sucesión $\{f(x_k)\}$ es no creciente. Por cuanto, además, esta sucesión está acotada inferiormente (por el valor mínimo m de la función $f(x)$ sobre el conjunto Q), será convergente (véase teorema 3.15 del cap. 3, t. 1. Denotemos con μ el límite de la sucesión $\{f(x_n)\}$. Está claro que $\mu\geqslant m$, donde m es el valor mínimo de $f(x)$ sobre el conjunto Q. Además, por cuanto todos los términos de la sucesión convergente no creciente no son menores que su límite (véase la observación 3 al teorema 3.15, cap. 3, t. 1, *para todos* los números k se cumple la desigualdad

$$f(x_k)\geqslant\mu. \tag{5.131}$$

Demostremos que para el límite μ se verifica la igualdad $\mu=m=\min\limits_{x\in Q} f(x)$

Supongamos que esta igualdad no tiene lugar, es decir, admitamos que $\mu>m$. Entonces, si denotamos con ν el valor máximo de $f(x)$ en el conjunto Q y con $\acute{Q}$, un subconjunto de puntos de Q, para los cuales se cumplen las desigualdades (5.120), entonces, en virtud del lema 7, existe una constante estrictamente positiva γ tal que se cumple la desigualdad (5.128) que conduce a la desigualdad siguiente:

$$f(x_k)-f(x_{k+1})\geqslant\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{k_2}{2}\right)\gamma^2>0. \tag{5.132}$$

válida para cualquier número k.

Al sumar las desigualdades (5.132), escritas para los números k iguales a 1, 2, 3, . . ., $(n-1)$, obtenemos que para todo número n

$$f(x_1)-f(x_n)\geqslant(n-1)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{k_2}{2}\right)\gamma^2$$

o bien, que es lo mismo,

$$f(x_n)\leqslant f(x_1)-(n-1)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{k_2}{2}\right)\gamma^2. \tag{5.132'}$$

Las desigualdades (5.132'), válidas para todo número n, contradicen a la desigualdad (5.131), pues, la magnitud del miembro derecho de

(5.132') se hace inferior al número μ para n suficientemente grande.

La contradicción obtenida quiere decir que nuestra suposición de que $\mu > m$ es errónea, es decir, demuestra que $\mu = m$. Así, pues, se ha demostrado que la sucesión $\{f(x_k)\}$ converge hacia el valor mínimo m de la función $f(x)$ sobre el conjunto Q.

Queda demostrar que la propia sucesión iterativa $\{x_k\}$ converge hacia el punto x_0, en el cual se alcanza este valor mínimo *).

Fijamos arbitrariamente un número positivo ε y designemos con C_ε una esfera abierta m-dimensional de radio ε con centro en el punto x_0.

Luego, denotemos con $\hat{Q}_\varepsilon$ aquella parte del conjunto Q que no contiene puntos de la esfera C_ε. Está claro que $\hat{Q}_\varepsilon$ es un conjunto cerrado acotado, de modo que la función $f(x)$ alcanza en este conjunto (en virtud del segundo teorema de Weierstrass) su valor mínimo que se designará por m_ε.

Podemos afirmar que $m_\varepsilon > m$, puesto que, de lo contrario, se perturbaría la condición de existencia sobre el conjunto Q del único punto de mínimo local de la función $f(x)$.

Ahora, se puede afirmar también que sobre el conjunto $\hat{Q}_\varepsilon$ se tienen sólo un número *finito* de puntos de la sucesión $\{x_k\}$ (puesto que la sucesión $\{f(x_k)\}$ que cuenta con un número infinito de elementos que satisfacen la desigualdad $f(x_k) \geqslant m_\varepsilon > m$, no puede converger hacia el número m).

Por consiguiente, hemos demostrado que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N, a partir del cual todos los elementos de la sucesión $\{x_k\}$ se disponen dentro de la esfera C_ε de radio ε con centro en el punto x_0. Esto significa precisamente que la sucesión $\{x_k\}$ converge hacia el punto x_0.

Con ello queda demostrado el teorema fundamental para el caso del conjunto cerrado convexo acotado Q.

Ahora, sea Q un conjunto cerrado convexo *no acotado*. De nuevo fijamos arbitrariamente un punto x_1 de este conjunto y formamos la sucesión iterativa (5.116), a condición de que α satisfaga las desigualdades (5.115).

Al demostrar el teorema de existencia de mínimo local de una función fuertemente convexa (véase p. 2) se ha establecido que el punto x_0 de mínimo local de la función fuertemente convexa $f(x)$ sobre el conjunto cerrado convexo no acotado Q se dispone en aquella parte Q_R del conjunto Q que se contiene en la esfera C_R con centro en el punto x_1, cuyo radio R está elegido de la condición

$$\frac{k_1}{2} R - |\operatorname{grad} f(x_1)| > 0.$$

*) Ya hemos demostrado que el valor mínimo de la función $f(x)$ sobre el conjunto Q se alcanza en el único punto de este conjunto.

En aquella circunstancia establecimos también que el subconjunto Q_R del conjunto Q es un conjunto cerrado convexo acotado y que en todo punto fuera de Q_R los valores de $f(x)$ son superiores a $f(x_1)$.

En virtud del lema 7 (y, con mayor precisión, en virtud de la desigualdad (5.127)), la sucesion $\{f(x_k)\}$ es no creciente, mientras que fuera de los márgenes de Q_R todos los valores de $f(x)$ sobrepasan los de $f(x_1)$, razón por la cual *todos los puntos de la sucesión iterativa* $\{x_k\}$ *se disponen en* Q_R y, por eso, para todo número k

$$P_Q(x_k - \alpha \cdot \text{grad } f(x_k)) = P_{Q_R}(x_k - \alpha \cdot \text{grad } f(x_k)).$$

Por consiguiente, la sucesión iterativa (5.116) puede ser sustituida por

$$x_{k+1} = P_{Q_R}(x_k - \alpha \cdot \text{grad } f(x_k)),$$

después de lo cual todos los razonamientos posteriores se reducen al conjunto cerrado convexo *acotado* Q_R, es decir, al caso ya examinado más arriba.

El teorema fundamental está demostrado por completo.

OBSERVACIÓN 1. Con una sencillez particular se expresa la sucesión (5.116) para el caso en que el conjunto Q coincide con todo el espacio E^m. En este caso para todo punto x se verifica la igualdad $P_Q(x) = x$ y, por eso, la fórmula recurrente (5.116) tendrá la forma

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \cdot \text{grad } f(x_k)$$

OBSERVACIÓN 2. El método expuesto permite buscar (si se cumplen las condiciones correspondientes) la solución $\overset{\circ}{x}_0 = (\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ de un sistema de m ecuaciones funcionales:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ f_2(x) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x) = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0. \end{cases}$$

Basta señalar que la solución del sistema citado coincide con el punto de mínimo local de la función

$$f(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x) + \ldots + f_m^2(x).$$

OBSERVACIÓN 3. La teoría de búsqueda de un mínimo local de una función fuertemente convexa (hacia las y negativas), expuesta aquí, puede aplicarse sin complicaciones algunas al problema de búsqueda del mínimo local de una función fuertemente convexa (hacia las y positivas).

Complemento

Sobre la elección de la partición óptima de un segmento para el cálculo aproximado de una integral

En el capítulo 3 un segmento $[a, b]$ se dividía, con el fin de calcular aproximadamente una integral

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{5.133}$$

en un número suficientemente grande n de segmentos parciales iguales y sobre cada uno de estos segmentos la función $f(x)$ se sustituía por un polinomio de órdenes nulo, primero o segundo. El error surgido en este caso despreciaba plenamente las propiedades individuales de la función $f(x)$. Naturalmente, surge, por eso, la cuestión de variación de los puntos de partición del segmento principal $[a, b]$ y de elección, para cada función fija $f(x)$, de tal partición óptima del segmento principal en n segmentos parciales (como regla, no iguales uno a otro) que asegure una magnitud mínima del error de la fórmula aproximada dada.

Detengámonos aquí en la resolución de la cuestión mencionada por un método que se debe a A.N. Tijonov y S.S. Gaisarián*).

Con el fin de calcular aproximadamente la integral (5.133), dividamos el segmento $[a, b]$ en n segmentos parciales mediante unos puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n = b.$$

Denotaremos longitud del k-ésimo segmento parcial $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) con el símbolo h_k, (de modo que $h = x_k - x_{k-1}$).

Al introducir la integral (5.133) en forma de una suma de integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx, \qquad (5.134)$$

aproximemos cada una de las integrales del segundo miembro de (5.134) con ayuda de una de las tres fórmulas aproximadas (de los rectángulos, trapecios o de las parábolas). Cualquiera de las tres fórmulas mencionadas puede ser escrita en la forma

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = h_k \sum_{i=0}^{m-1} q_i f(x_k + t_i h_k) + R_{s,\,m,\,k}(f), \qquad (5.135)$$

donde los nudos t_i y los pesos q_i ($i = 0, 1, \ldots, m-1$) se eligen de modo que el término residual $R_{s,m,k}(f)$ sea de orden h_k^s para cierto $s > 1$.**)

Al introducir (5.135) en (5.134), obtenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} h_k \sum_{i=0}^{m-1} q_i f(x_k + t_i h_k) + R_{s,\,m}(f), \qquad (5.136)$$

donde

$$R_{s,\,m}(f) = \sum_{k=1}^{n} R_{s,\,m,\,k}(f). \qquad (5.137)$$

Planteemos la cuestión de una elección de la partición $\{x_k\}$ del segmento $[a, b]$ con la cual el cuadrado del error (5.137) alcance el mínimo, siendo fijos el número n de puntos de partición, la función $f(x)$ y la fórmula aproximada (5.135). Planteada de tal modo la cuestión, el cuadrado del error $R^2_{s,m}(f)$ sólo depende de la elección de los puntos intermedios de partición, es decir, es una

*) Véase la obra *Sobre la elección de las redes óptimas en el cálculo aproximado de las cuadraturas* por A.N. Tijonov y S.S. Gaisarián (En: *Revista de matemática de cómputo y física matemática*, v. 9, No. 5, 1969) (en ruso).

**) En particular, para la fórmula de los trapecios en (5.135) se debe poner $m = 2$, $s = 2$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $q_0 = q_1 = 1/2$.

función de $(n-1)$ variables $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, definida en un tetraedro $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$. Por cuanto el tetraedro citado es un dominio abierto, puede suceder que el mínimo de la función $R^2_{s,m}(f)$ en el citado tetraedro, como regla, no se alcance (es decir, no existe, en general, la partición óptima del segmento $[a, b]$).

Podemos, sin embargo, demostrar que *si la derivada $f^{(4)}(x)$ conserva invariable su signo en el segmento $[a, b]$, el valor mínimo del cuadrado del error $R^2_{s,m}(f)$ se alcanza con una partición del segmento $[a, b]$ tal que sus nudos $\bar{x}_k$ satisfacen $(n-1)$ ecuaciones*

$$\frac{\partial R^2_{s,m}(f)}{\partial x_k}=0 \quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n-1) \tag{5.138}$$

*y las condiciones adicionales $x_0 = a$, $x_n = b$**).

Detengámonos más detalladamente en el caso de *la fórmula de los trapecios*. En este caso, en la fórmula (5.136) hay que adaptar $s = 2$, $m = 2$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $q_0 = q_1 = 1/2$, por lo que la fórmula (5.136) tomará la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{2}\left[f(x_k)+f(x_k-h_k)\right]-R_{2,2}(f). \tag{5.139}$$

Las ecuaciones (5.138) se reducen, en virtud de (5.139) y (5.134), a la forma

$$f(x_{k+1})-f(x_{k-1})=f'(x_k)\,(x_{k+1}-x_{k-1}) \quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n-1). \tag{5.140}$$

La existencia de la solución del sistema de ecuaciones (5.140) se asegura por la conservación del signo de la segunda derivada $f''(x)$ en el segmento $[a, b]$, es

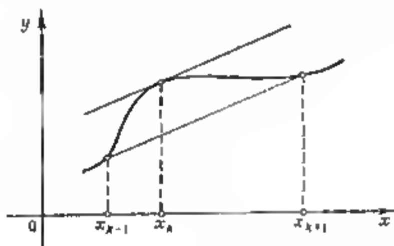


Fig. 5.4

decir, conservando la orientación de la convexidad de la curva $y = f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Los nudos $\{\bar{x}_k\}$ de la partición óptima del segmento $[a, b]$ definida mediante las ecuaciones (5.140), poseen la propiedad geométrica siguiente: una *secante trazada por los puntos de la gráfica de la función $y = f(x)$ cuyas abscisas son $\bar{x}_{k+1}$ y $\bar{x}_{k-1}$, es paralela a la tangente a la gráfica mencionada, trazada por su punto de abscisa $\bar{x}_k$.*

*) La demostración de esta afirmación puede encontrarse en la obra de A.N. Tijonov y S.S. Gaisarián, citada en la nota al pie de la pág. 241.

Esta propiedad constituye un corolario inmediato de las igualdades (5.140) y se ilustra en la fig. 5.4 (los razonamientos son los mismos que en el § 7, cap. 8, t. 1).

Se puede demostrar que los nudos de «partición aproximada» $\{\tilde{x}_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ definidos mediante las igualdades recurrentes

$$\tilde{x}_0 = a,\quad \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \lambda\, |f''(\tilde{x}_k)|^{-1/3} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{5.141}$$

satisfacen para $\lambda = (b - a)/n$ las relaciones (5.140) con un error (o, como suele decirse, con un defecto) de orden λ^2. Esto quiere decir que, siendo n grande, la partición $\{\tilde{x}_k\}$ es próxima a la partición óptima $\{\bar{x}_k\}$. De este modo, cuando n es grande, el cálculo de la integral (5.133) según la fórmula de los trapecios con la partición $\{\tilde{x}_k\}$, cuyos nudos se definen sucesivamente mediante las relaciones recurrentes (5.141), asegura un error próximo al error mínimo.

Capítulo 6

TEORIA DE LAS FUNCIONES IMPLÍCITAS Y SUS APLICACIONES

§ 1. Concepto de función implícita

En las matemáticas y en sus aplicaciones hemos de enfrentarnos con los problemas en que una variable u, que por el sentido de un problema dado es una función de los argumentos $x, y, \ldots,$ se define mediante una ecuación funcional

$$F(u, x, y, \ldots) = 0 \tag{6.1}$$

En este caso suele decirse que u, siendo una función de los argumentos $x, y, \ldots$ *está dada implícitamente*. Así, por ejemplo, una función $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, examinada dentro del círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$, puede ser dada implícitamente mediante una ecuación funcional

$$F(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{6.2}$$

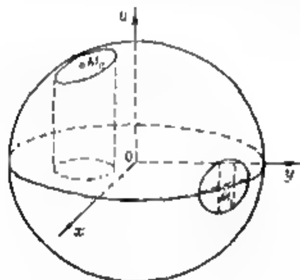


Fig. 6.1

Surge, naturalmente, la cuestión, en qué condiciones la ecuación funcional (6.1) es resoluble *unívocamente* respecto de u, es decir, define *unívocamente* la función implícita $u = \varphi(x, y, \ldots)$, y una cuestión más específica: en qué condiciones esta función explícita es *continua y diferenciable*. Estas preguntas no son simples. Por ejemplo, en el caso general, la ecuación funcional (15.2) define, dentro del círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$, además de la función explícita citada más arriba $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, una infinidad de otras funciones. Tal es, por ejemplo, una función $u = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, así como cualquier otra función u, igual a $+\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ para ciertos puntos (x, y) del círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$, e igual a $-\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, para los demás puntos de este círculo. Con el fin de aclarar la cuestión de las condiciones que aseguran la resolubilidad unívoca de la ecuación (6.2) respecto de u, recurramos a una ilustración geométrica. La ecuación (6.2) define en un espacio (u, x, y) la esfera S de radio 1 con centro en el origen de las coordenadas (fig. 6.1). Tomemos en la esfera S un

punto M_0 $(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ que no esté dispuesto en el plano Oxy, es decir, un punto tal, en cuyo caso $\overset{\circ}{u} \neq 0$. Es obvio que la parte de la esfera S, dispuesta dentro de un entorno suficientemente pequeño del punto M_0, *se proyecta unívocamente sobre el plano Oxy*. Desde el punto de vista analítico esto significa que si consideramos la función $F(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1$ sólo en el entorno citado del punto M_0, la ecuación (6.2) es unívocamente resoluble respecto de u y define la única función explícita $u = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ para $\overset{\circ}{u} > 0$ y $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ para $\overset{\circ}{u} < 0$.

En cambio, si tomamos en la esfera S un punto M_1 $(0, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ dispuesto en el plano Oxy (fig. 6.1), entonces, evidentemente, una parte de la esfera S dispuesta en *cualquier* entorno de M_1 *se proyecta sobre el plano Oxy de una manera no unívoca*. Analíticamente esto significa que si examinamos la función $F(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1$ en cualquier entorno del punto M_1, la ecuación (6.2) no será unívocamente resoluble respecto de u. Prestemos atención a que la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial u} = 2u$ de la función $F(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1$ no *se anula en el punto* M_0, anulándose en M_1. Más abajo deduciremos que para que la ecuación funcional general (6.1) sea resoluble unívocamente en un entorno del punto M_0 respecto de u un papel de principio lo desempeña el hecho de que *la derivada parcial* $\frac{\partial F}{\partial u}$ *no se reduce a cero en el punto* M_0. Estableceremos, además, las condiciones, bajo las cuales una función explícita que es la única solución de la ecuación (6.1) sea *continua y diferenciable*.

En adelante denotaremos con el símbolo R el espacio de variables $(u, x, y, \ldots)$ y con el R', el espacio de las variables $(x, y, \ldots)$. Para reducir las notaciones y para hacer más cómoda la ilustración geométrica, vamos a examinar dos variables x e y.

§ 2. Teorema de existencia y de diferenciabilidad de una función implícita y algunas de sus aplicaciones

1. Teorema de existencia y de diferenciabilidad de una función implícita

Teorema 6.1. *Supongamos que una función $F(u, x, y)$ es diferenciable en cierto entorno de un punto M_0 $(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ del espacio R, con la particularidad de que la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial u}$ es continua en el punto M_0. Entonces, si en el punto M_0 la función F se reduce a cero y la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial u}$ no se anula, entonces para un número positivo ε suficientemente pequeño existe tal entorno del punto M'_0 $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ del espacio R' que dentro*

de los márgenes de este entorno existe una única función $u = \varphi(x, y)$ *que satisface la condición* $|u - \overset{\circ}{u}| < \varepsilon$ *y que es la solución de la ecuación*

$$F(u, x, y) = 0, \tag{6.3}$$

y, además, esta función $u = \varphi(x, y)$ *es continua y diferenciable en el entorno mencionado del punto* M_0'.

OBSERVACIÓN 1. En las condiciones del teorema 6.1 la exigencia de continuidad de la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial u}$ en el punto M_0 puede ser omitida, mas habrá que exigir adicionalmente que esta derivada no se anule no sólo en el propio punto M_0, sino tampoco en cierto entorno de este punto y conserve un signo determinado en dicho entorno.

DEMOSTRACIÓN del teorema 6.1.

1. Demostremos, ante todo, que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño en *un entorno del punto* $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ *existe una única función* $u = \varphi(x, y)$ *que satisface la condición* $|u - \overset{\circ}{u}| < \varepsilon$ *y que es la solución de la ecuación* (6.3). Para hacer la demostración más evidente, vamos a acompañarla con una ilustración geométrica. Por el curso de geometría analítica sabemos que la ecuación (6.3) define en el espacio R cierta superficie S (fig. 6.2), con la particularidad de que, en virtud de la condición $F(M_0) = 0$, el punto M_0 se dispone en esta superficie. Desde el punto de vista geométrico la resolubilidad unívoca de la ecuación (6.3) respecto de u significa que una parte de la superficie S, dispuesta en proximidad inmediata al punto M_0, puede ser proyectada unívocamente sobre el plano de coordenadas Oxy.

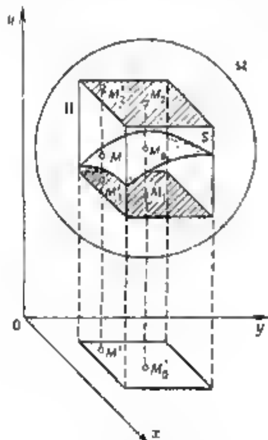


Fig. 6.2

Convengamos en considerar, para concretar, que la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial u}$ *es positiva* en el punto M_0. Entonces, de la continuidad de la citada derivada en M_0 y del teorema de la estabilidad del signo de una función continua se deduce que *existe un entorno del punto* M_0, *en cuyos márgenes la derivada* $\frac{\partial F}{\partial u}$ *es siempre positiva*. Podemos imagi-

namos este entorno en forma de una esfera Ω de radio suficientemente pequeño con centro en el punto M_0. Ahora, fijamos un número positivo ε tan pequeño que cada uno de los puntos M_1 $(\overset{\circ}{u}-\varepsilon, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ y M_2 $(\overset{\circ}{u}+\varepsilon, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ esté dispuesto dentro de la esfera Ω (con el fin de conseguirlo, basta tomar ε inferior al radio de la esfera Ω). Subrayemos que en este caso el número ε está acotado inferiormente sólo por el cero y podemos tomarlo tan pequeño como se quiera. Lo último será útil para nosotros más abajo.

Veamos una función F $(u, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ de una variable sobre un segmento $\overset{\circ}{u}-\varepsilon \leqslant u \leqslant \overset{\circ}{u}+\varepsilon$. En el lenguaje geométrico esto quiere decir que estudiamos la función de tres variables F (u, x, y) a lo largo del segmento M_1M_2 (véase fig. 6.2). Por cuanto la derivada $\frac{\partial E}{\partial u}$ $(u, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ es positiva sobre el segmento $\overset{\circ}{u}-\varepsilon \leqslant u \leqslant \overset{\circ}{u}+\varepsilon$, entonces la función F $(u, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ crece en dicho segmento. Mas, en este caso, por cuanto esta función es igual a cero en el centro del segmento citado, (es decir, para $u=\overset{\circ}{u}$), la función F $(u, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ *tiene valor negativo en el extremo izquierdo y positivo, en el extremo derecho del segmento mencionado*, es decir,

$$F(M_1)<0, \quad F(M_2)>0.$$

Luego examinaremos las funciones F $(\overset{\circ}{u}-\varepsilon, x, y)$ y F $(\overset{\circ}{u}+\varepsilon, x, y)$ de dos variables x e y, es decir, hablando en el lenguaje geométrico, analizaremos la función F (u, x, y) en dos planos paralelos al plano de coordenadas Oxy, el primero de los cuales pasa por el punto M_1, y el segundo, por el punto M_2. Por cuanto $F(M_1)<0$, $F(M_2)>0$ y la función F (u, x, y) es continua en todo punto de la esfera Ω, entonces, de acuerdo con el teorema de la estabilidad del signo de una función continua, en los planos mencionados se encontrarán *entornos* de los puntos M_1 y M_2 tales, en cuyos márgenes la función F conserva los mismos signos que en los puntos M_1 y M_2. Podemos tomar estos entornos en forma de cuadrados abiertos con centros en los puntos M_1 y M_2 y con lado suficientemente pequeño 2δ (en la fig. 6.2 los cuadrados citados están rayados). El hecho de que la función F (u, x, y) conserva el mismo signo en los cuadrados citados se expresa analíticamente mediante las inecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} F(\overset{\circ}{u}-\varepsilon,\ x,\ y)<0, \\ F(\overset{\circ}{u}+\varepsilon,\ x,\ y)>0 \end{array}\right\} \text{ para } |x-\overset{\circ}{x}|<\delta, \quad |y-\overset{\circ}{y}|<\delta. \tag{6.4}$$

Impongamos una condición más a la elección del lado de los cuadrados en consideración: *tomemos* δ *tan pequeño que ambos cuadrados men-*

cionados estén dentro de la esfera Ω (esto es factible a ciencia cierta, pues los centros de los cuadrados M_1 y M_2 son puntos interiores de la esfera Ω). Con tal elección de δ cualquier punto del espacio (u, x, y), cuyas coordenadas satisfacen las inecuaciones

$$|x-\overset{\circ}{x}|<\delta, \quad |y-\overset{\circ}{y}|<\delta, \quad |u-\overset{\circ}{u}|<\varepsilon, \tag{6.5}$$

estará dentro de la esfera Ω. Desde el punto de vista geométrico, las inecuaciones (6.5) definen un paralelepípedo rectangular abierto con centro en el punto M_0 y con lados paralelos a los ejes coordenados u, x, y, e iguales, respectivamente, a 2ε, 2δ y 2δ. Denotemos dicho paralelepípedo con el símbolo Π. Por cuanto el paralelepípedo Π está dispuesto en el interior de la esfera Ω, *la derivada* $\frac{\partial F}{\partial u}$ *será positiva en todo punto del paralelepípedo* Π*. Además, en virtud de las inecuaciones (6.4), la función $F(u, x, y)$ *es negativa en la base inferior y positiva, en la base superior de* Π.

Demostremos ahora que la ecuación (6.3) es univocamente resoluble respecto de u si consideramos la función $F(u, x, y)$ sólo para los valores u, x, y dispuestos en el interior del paralelepípedo Π. Aclaremos qué es lo que necesitamos demostrar. Sea $M'(x, y)$ un punto cualquiera del espacio R', cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades

$$|x-\overset{\circ}{x}|<\delta, \quad |y-\overset{\circ}{y}|<\delta. \tag{6.6}$$

Dicho de otro modo, sea $M'(x, y)$ un punto cualquiera del plano Oxy dispuesto dentro del cuadrado con centro en un punto $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ con lados iguales a 2δ. Se pide demostrar que para las coordenadas x, y del punto M' se encontrará un número u, *el único*, del intervalo $\overset{\circ}{u}-\varepsilon<u<\overset{\circ}{u}<+\varepsilon$ de tal índole que $F(u, x, y)=0$. (Desde el punto de vista geométrico, esto quiere decir que cualquier recta paralela al eje u, que corta el paralelepípedo Π, interseca la superficie S en el interior del paralelepípedo Π en uno, y sólo un punto.)

Al fijar los valores x e y que satisfacen las desigualdades (6.6), veamos una función $F(u, x, y)$ del argumento u sobre el segmento $\overset{\circ}{u}-\varepsilon\leqslant\overset{\circ}{u}\leqslant\overset{\circ}{u}+\varepsilon$, es decir, examinemos la función $F(u, x, y)$ sobre el segmento $M_1'M_2'$, donde M_1' y M_2' son los puntos de intersección de una recta que pasa por el punto $M'(x, y)$ y que es paralela al eje Ou, con las bases del paralelepípedo Π (véase fig. 6.2). Por cuanto la derivada $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x, y)$ es positiva sobre el segmento $\overset{\circ}{u}-\varepsilon\leqslant u\leqslant\overset{\circ}{u}+\varepsilon$, la función $F(u, x, y)$ crece en este segmento (o bien, lo que es lo mismo, crece en el segmento $M_1'M_2'$). Mas, en este caso, de las condiciones

*) Incluidos los cuadrados abiertos dispuestos en sus bases.

$F(M_1') < 0$, $F(M_2') > 0$ se desprende que en el interior del segmento $\overset{\circ}{u} - \varepsilon \leqslant u \leqslant \overset{\circ}{u} + \varepsilon$ existe un único valor u tal que $F(u, x, y) = 0$ (o bien, en el lenguaje geométrico, en el interior del segmento $M_1'M_2'$ existe el único punto M dispuesto sobre la superficie S).

Supongamos ahora que la función $u = \varphi(x, y)$ simboliza una regla por cuyo intermedio a todo punto $M'(x, y)$ del entorno (6.6) se le pone en correspondencia el único número u del intervalo $\overset{\circ}{u} - \varepsilon < u < \overset{\circ}{u} + \varepsilon$, para el cual $F(u, x, y) = 0$. Se ha demostrado que en el entorno (6.6) existe la única función $u = \varphi(x, y)$ que satisface la condición $|u - \overset{\circ}{u}| < \varepsilon$ y que es la solución de la ecuación (6.3).

2. Demostremos ahora que *la función $u = \varphi(x, y)$ es continua en cualquier punto $M'(x, y)$ del entorno* (6.6). Por cuanto para todo punto $M'(x, y)$ del entorno (6.6) *quedan cumplidas las mismas condiciones* *) que para el punto $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$, es suficiente demostrar la continuidad de la función $u = \varphi(x, y)$ *sólo en el punto $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$*. Se pide demostrar que para cualquier ε suficientemente pequeño y positivo existe un número positivo δ tal que con cualesquiera x e y que satisfacen las desigualdades $|x - \overset{\circ}{x}| < \delta$, $|x - \overset{\circ}{y}| < \delta$, se cumpla la desigualdad $|u - \overset{\circ}{u}| < \varepsilon$, donde $u = \varphi(x, y)$, $\overset{\circ}{u} = \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$. Al tomar a título de ε el número que se ha elegido más arriba al exponer el p. 1, la existencia de δ se asegurará mediante las desigualdades (6.5). Resta notar que en los razonamientos aducidos en el p. 1 el número positivo ε puede ser elegido *tan pequeño como se quiera* (esto ya se ha dicho en el p. 1).

Con ello queda establecida la continuidad de la función $u = \varphi(x, y)$. Escribamos *la condición de continuidad* de la función $u = \varphi(x, y)$ en el punto $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ *en forma de diferencias*. Al designar con Δu el incremento total de la función $u = \varphi(x, y)$ en el punto $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$, correspondiente a los incrementos de los argumentos Δx y Δy, obtenemos que $\Delta u \to 0$ cuando $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0. \end{cases}$

3. Resta demostrar *la diferenciabilidad* de la función $u = \varphi(x, y)$ en cualquier punto $M'(x, y)$ del entorno (6.6). En virtud de la observación del p. 2, resulta suficiente probar la diferenciabilidad de la función $u = \varphi(x, y)$ en el mismo punto $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$. Con el fin de ha-

*) A saber, a todo punto $M'(x, y)$ del entorno (6.6) le corresponde un punto $M(u, x, y)$ del espacio R tal que la función $F(u, x, y)$ se anula en el punto M, es diferenciable en cierto entorno del punto M y tiene en este entorno una derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial u}$ distinta de cero.

cero, calculemos el incremento total Δu de la función $u = \varphi(x, y)$ en el punto $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$, correspondiente a los incrementos de los argumentos Δx y Δy. Por cuanto $F(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) = 0$ y $F(\overset{\circ}{u} + \Delta u, \overset{\circ}{x} + \Delta x, \overset{\circ}{y} + \Delta y) = 0$, *el incremento total* ΔF *de la función* $F(u, x, y)$ en el punto $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$, correspondiente a los incrementos de los argumentos Δu, Δx y Δy, *es igual a cero*. Pero, en vista de la condición de diferenciabilidad de la función $F(u, x, y)$ en el punto $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$, este incremento total tiene la forma

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma\right)\Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta\right)\Delta y.$$

Aquí, *todas las derivadas parciales* $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ *se toman en el punto* $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$; α, β, $\gamma \to 0$, cuando $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0, \\ \Delta u \to 0. \end{cases}$

Así, pues, obtenemos

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma\right)\Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta\right)\Delta y. \qquad (6.7)$$

De acuerdo con la forma en diferencias de la condición de continuidad de la función $u = \varphi(x, y)$ en el punto $M_0'(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$, $\Delta u \to 0$ cuando $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$. De este modo, podemos afirmar que de la condición $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$ se infiere que α, β y $\gamma \to 0$.

Por la hipótesis del teorema, la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial u}$ *es distinta de cero* en el punto M_0. Por cuanto $\gamma \to 0$ cuando $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0, \end{cases}$ la expresión $\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma$ *no se anula, para* Δx y Δy *suficientemente pequeños*. En tal caso, la fórmula (6.7) puede ser dividida por $\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma\right)$ y, como resultado, obtendremos

$$\Delta u = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma}\right)\Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma}\right)\Delta y. \qquad (6.8)$$

Según el teorema del valor límite de un cociente de dos funciones, podemos afirmar que

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha}{\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}+\mu, \qquad -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}+\beta}{\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}+\nu, \qquad (6.9)$$

donde μ y $\nu\to 0$ cuando $\begin{cases}\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0.\end{cases}$

Al cotejar las fórmulas (6.8) y (6.9), obtenemos en definitiva

$$\Delta u=\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\right)\Delta x+\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\right)\Delta y+\mu\Delta x+\nu\Delta y. \qquad (6.10)$$

La fórmula (6.10) demuestra la diferenciabilidad de la función $u=\varphi(x, y)$ en el punto $M_0(\overset{\circ}{x}, \overset{*}{y})$. Con esto queda demostrado completamente el teorema 6.1.

OBSERVACIÓN 2. La demostración aducida se extiende sin complicaciones algunas al caso de una función implícita que depende no de dos, sino de cualquier número finito de argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$*). La ventaja del caso de dos argumentos x e y sólo consiste en que se admite una interpretación geométrica ilustrativa en el espacio (u, x, y).

2. Cálculo de las derivadas parciales de una función definida implícitamente. Detengámonos en el cálculo de las derivadas parciales de una función definida implícitamente mediante la ecuación (6.3). Supongamos cumplidas las condiciones del teorema 6.1. Entonces, para el incremento total de la función $u=\varphi(x, y)$ es válida la representación (6.10). Esta representación y el teorema 5.9 permiten afirmar que las derivadas parciales de la función $u=\varphi(x, y)$ se definen por las fórmulas

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}. \qquad (6.11)$$

Fórmulas análogas son válidas también para el caso en que una función definida implícitamente depende no de dos, sino de cualquier número finito de argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_m$. En tal caso

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \quad (k=1, 2, \ldots, m)$$

*) En particular, de un argumento también.

Si deseamos asegurar la existencia de las *segundas* derivadas de la función $u = \varphi(x, y)$, definida implícitamente, han de reforzarse naturalmente, las exigencias planteadas ante la función $F(u, x, y)$ en el teorema 6.1, a saber: hemos de exigir adicionalmente que la función $F(u, x, y)$ sea dos veces diferenciable en el punto que se considera. Para las suposiciones admitidas detengámonos en el cálculo de *las derivadas parciales de segundo orden.*

Introduzcamos la noción de derivada parcial total de una función, útil para la exposición ulterior. Supongamos definida una función diferenciable de tres argumentos $\Phi(u, x, y)$, con la particularidad de que uno de estos argumentos, u, es de por sí una función diferenciable de otros dos argumentos x e y. Entonces, la función $\Phi(u, x, y)$ puede considerarse como función compuesta de dos argumentos x, y. Las derivadas parciales de esta función compuesta respecto de x e y se llamarán *derivadas parciales totales de la función* $\Phi(u, x, y)$ *respecto de x e y*, y se denotarán con los símbolos $\frac{D\Phi}{Dx}$ y $\frac{D\Phi}{Dy}$. De acuerdo con la regla de diferenciación de una función compuesta, obtenemos las siguientes fórmulas para las derivadas parciales totales mencionadas:

$$\frac{D\Phi}{Dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{D\Phi}{Dy} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Pasemos al cálculo de las derivadas parciales de segundo orden de una función implícitamente definida. Para concretar, calculemos la derivada $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$. Diferenciando la primera de las fórmulas (6.11) respecto de y y teniendo presente que cada una de las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial u}$ depende de tres argumentos u, x, y, el primero de los cuales es de por sí una función de x e y, tendremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{D\left[-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\right]}{Dy} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial u}\,\dfrac{D\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]}{Dy} + \dfrac{\partial F}{\partial x}\,\dfrac{D\left[\frac{\partial F}{\partial u}\right]}{Dy}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^2} =$$

$$= \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) + \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^2}.$$

Al introducir en la fórmula obtenida la expresión $\frac{\partial u}{\partial y}$, definida por la segunda de las fórmulas (6.11) obtenemos en definitiva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}=$$
$$=\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial u}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial u}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^3}. \qquad (6.12)$$

De un modo análogo se calculan las derivadas parciales $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Por un método similar pueden calcularse también las derivadas parciales de tercer orden y de órdenes subsiguientes*).

EJEMPLOS. 1) Calcúlese la derivada parcial $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ de la función $u=\varphi(x, y)$, definida mediante la ecuación

$$x+y+u-e^{-(x+y+u)}=0.$$

Haciendo uso de las fórmulas (6.11), calculemos, ante todo, las derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1+e^{-(x+y+u)}}{1+e^{-(x+y+u)}}=-1.$$

Es evidente, ahora, que $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}=0$.

2) El mismo problema para una función definida mediante la ecuación

$$u^2+x^2+y^2-a^2=0.$$

Haciendo uso de la fórmula (6.11), obtendremos

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{u}.$$

Luego tendremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}=\frac{D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{Dy}=\frac{D\left(-\frac{x}{u}\right)}{Dy}=\frac{x\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2}=-\frac{xy}{u^3}.$$

*) A condición de que la función $F(u, x, y)$ sea diferenciable en el punto dado un número correspondiente de veces.

3. Puntos singulares de una superficie y de una curva plana. Examinemos una superficie S (una curva plana L) definida en un sistema dado de coordenadas rectangulares cartesianas mediante la ecuación $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$). En lo que se refiere a la función $F(x, y, z)$ ($F(x, y)$), supongamos que ella en todo punto tiene derivadas parciales continuas de primer orden respecto de todos los argumentos en cierto entorno de cualquier punto de la superficie S (de la curva L). Llamemos singular un punto dado de la superficie S (de la curva L) si en este punto se reducen a cero todas las derivadas parciales de primer orden de la función

$$F(x, y, z) \quad (F(x, y)).$$

En el entorno de un punto singular no puede aplicarse a la ecuación $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$) el teorema 6.1, es decir, no se puede afirmar que esta ecuación es resoluble por lo menos respecto de una de las variables x, y, z (x, y). De este modo, una parte de la superficie S (un tramo de la curva L), adyacente al punto singular, puede no admitir la proyección unívoca sobre ninguno de los planos coordenados (sobre ningún eje de coordenadas). La estructura de la superficie S (de la curva L) en un entorno de un punto singular puede ser muy compleja y requiere un análisis adicional.

Los puntos de la superficie S (de la curva L) que no son singulares se denominan *ordinarios*. En el entorno de un punto ordinario es válido el teorema 6.1, de suerte que una parte de la superficie S (un tramo de la curva L), adyacente a un punto ordinario, admite la proyección unívoca por lo menos sobre uno de los planos coordenados (por lo menos sobre uno de los ejes coordenados), lo que facilita esencialmente el análisis de dicha parte (tramo).

EJEMPLOS. 1) Hállense los puntos singulares de un cono circular $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Por cuanto $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, resulta que $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -2z$. El único punto singular es el origen de las coordenadas. Es bien conocido que en el entorno de este punto la superficie del cono no puede ser proyectado unívocamente sobre ninguno de los planos coordenados (fig. 6.3).

2) El mismo problema con relación a una curva plana $x^2 - y^2 + x^3 = 0$. Las derivadas parciales tienen por expresión $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$. Ambas derivadas parciales se anulan en dos puntos del plano $(0, 0)$ y $(-2/3, 0)$. De los dos puntos mencionados sólo el primero pertenece a la curva en consideración, es decir, es singular. Al construir la curva $x^2 - y^2 + x^3 = 0$ en el entorno del punto $(0, 0)$, nos convencemos de que este punto es punto múltiple de la gráfica (fig. 6.4). Está claro que en el entorno de este punto la curva no puede proyectarse unívocamente ni sobre el eje Ox, ni sobre el eje Oy.

4. Condiciones que aseguran la existencia de la inversa de la función $y = f(x)$. Valgámonos del teorema 6.1. con el fin de aclarar las condiciones cuyo cumplimiento permite que la función $y = f(x)$ tenga en cierto entorno del punto x_0 *función inversa* $x = f^{-1}(y)$, definida en cierto entorno del punto y_0, donde $y_0 = f(x_0)$. Analicemos $y = f(x)$ como función definida mediante una ecuación funcional de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$.

En este caso la cuestión de existencia de la función inversa coincide con la de resolubilidad respecto de x de la citada ecuación funcional. Obtendremos, antes de demostrar este teorema, la siguiente

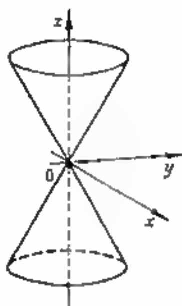


Fig. 6.3

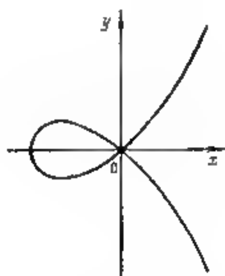


Fig. 6.4

afirmación que viene a ser el corolario del teorema 6.1 y de la observación 1: *si la función $y = f(x)$ tiene en cierto entorno del punto x_0 una derivada distinta de cero, para dicha función existe en el entorno del punto x_0 la inversa $x = f^{-1}(y)$, definida y diferenciable en cierto entorno del punto y_0, donde $y_0 = f(x_0)$. La derivada de la citada inversa en el punto y_0 es igual*, en virtud de la segunda fórmula de (6.11), *a* $\frac{1}{f'(x_0)}$.

§ 3. Funciones implícitas definidas por un sistema de ecuaciones funcionales

1. Teorema de resolubilidad de un sistema de ecuaciones funcionales. En el párrafo antecedente hemos estudiado la cuestión de existencia y diferenciabilidad de una función implícita definida mediante *una* ecuación funcional. En este párrafo examinaremos un problema análogo *para una colección de m* (m es un número natural cualquiera) *funciones implícitas definidas mediante un sistema de ecua-*

ciones funcionales.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \quad (6.13)$$

se buscan como solución de un sistema de m ecuaciones funcionales

$$\left.\begin{aligned} F_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$

Estudiemos la cuestión de resolubilidad del sistema de inecuaciones funcionales (6.14) respecto de $u_1, u_2, \ldots, u_m$. En adelante entendremos por «resolución del sistema (6.14)» una colección de m funciones (6.13) tales que, al introducirlas en el sistema (6.14), todas las ecuaciones de este sistema pasan a ser identidades. Esta solución se llamará continua y diferenciable en cierto dominio D de variación de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si cada una de las funciones (6.13) es continua y diferenciable en el dominio D. Convengamos en denotar con el símbolo R el espacio de $(m+n)$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, y con el símbolo R', el espacio de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Veamos m funciones $F_1, F_2, \ldots, F_m$ de los primeros miembros del sistema (6.14) y formemos, a partir de las derivadas parciales de estas funciones, un determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}. \quad (6.15)$$

Un determinante de tipo (6.15) se denomina *determinante de Jacobi* *) (o bien, brevemente, *jacobiano*) de las funciones $F_1, F_2, \ldots, F_m$ respecto de las variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$ y se denota con el símbolo abreviado

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}.$$

---

*) C. G. Jacobi (1804—1851), matemático alemán.

Tiene lugar la siguiente afirmación notable.

Teorema 6.2 (generalización del teorema 6.1). *Supongamos que m funciones*

$$\left.\begin{array}{l} F_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n), \\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \quad (6.16)$$

son diferenciables en cierto entorno de un punto $M_0(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \ldots, \overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ del espacio R, con la particularidad de que las derivadas parciales de estas funciones respecto de las variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son continuas en el punto M_0. Entonces, si en el punto M_0 todas las funciones (6.16) se reducen a cero y el jacobiano $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$ es distinto de cero, se encontrará, para los números positivos suficientemente pequeños $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, un entorno del punto $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ del espacio R' tal que dentro de los márgenes de este entorno existen las únicas m funciones (6.13) que satisfacen las condiciones $|u_1-\overset{\circ}{u}_1|<\varepsilon_1$, $|u_2-\overset{\circ}{u}_2|<\varepsilon_2, \ldots, |u_m-\overset{\circ}{u}_m|<\varepsilon_m$ y que constituyen la solución del sistema de ecuaciones (6.14), además, esta solución es continua y diferenciable en el entorno mencionado del punto M_0').

OBSERVACIÓN. Cuando $m=1$, el teorema 6.2 no es otra cosa que el teorema 6.1, demostrado anteriormente *), pues en este caso el jacobiano (6.15) se reduce a una derivada parcial $\partial F_1/\partial u_1$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.2. Realicémosla por el método de inducción matemática. Para $m=1$ el teorema ya está demostrado. Por eso es suficiente (al suponer válido el teorema 6.2 para un sistema de m-1 ecuaciones funcionales) demostrar la validez del teorema también para el sistema citado de m ecuaciones funcionales. Dado que, por la hipótesis, el jacobiano

$$\Delta=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \quad (6.17)$$

*) Hay que tener en cuenta la observación 2 al teorema 6.1.

es distinto de cero en el punto M_0, *por lo menos uno de los menores* de $(m-1)$-ésimo orden *) de este jacobiano es distinto de cero en el punto M_0. Sin limitar la generalidad, convengamos en considerar que en el punto M_0 es distinto de cero un menor contorneado en la esquina superior izquierda. Entonces, por la suposición de inducción, las primeras m-1 ecuaciones del sistema (6.14) son resolubles respecto de $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$. Más exactamente, para $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ positivos suficientemente pequeños existe tal entorno del punto $M_0'' (\overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ del espacio R' de las variables $(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que dentro de los márgenes de este entorno quedan definidas $m-1$ funciones

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \varphi_1 (u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{m-1} = \varphi_{m-1} (u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}\right\} \qquad (6.18)$$

que satisfacen las condiciones $|u_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |u_{m-1} - \overset{\circ}{u}_{m-1}| < \varepsilon_{m-1}$ y constituyen, habida cuenta de estas condiciones, la única solución continua y diferenciable del sistema de las primeras $m-1$ ecuaciones (6.14).

Pongamos las funciones halladas (6.18) en el primer miembro de la última ecuación de (6.14). En este caso el primer miembro de esta última ecuación se reduce a una función que depende sólo de $u_m, x_1, \ldots, x_n$

$$F_m (u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m, x_1, \ldots, x_n) = F_m[\varphi_1 (u_m, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{m-1} (u_m, x_1, \ldots, x_n), u_m, x_1, \ldots, x_n] = \Psi (u_m, x_1, \ldots, x_n) \quad (6.19)$$

(la función mencionada está designada con Ψ). De este modo, la última de las ecuaciones de (6.14) nos conduce a la ecuación siguiente:

$$\Psi (u_m, x_1, \ldots, x_n) = 0. \qquad (6.20)$$

En virtud de la igualdad (6.19), $\Psi (u_m, x_1, \ldots, x_n)$ puede considerarse como una función compuesta de sus argumentos. Entonces, aplicando el teorema de diferenciabilidad de una función compuesta, podemos afirmar que la función $\Psi (u_m, x_1, \ldots, x_n)$ *es diferenciable en cierto entorno del punto* $M_1'' (\overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ *del espacio* R''. La igualdad (6.19) y la última de las desigualdades de (6.14) permiten afirmar que $\Psi (\overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n) = 0$. Por eso, con el fin de demostrar que a la ecuación (6.20) es aplicable el teorema 6.1 y que la misma es resoluble respecto de u_m, es suficiente establecer que la derivada par-

*) Recordemos que llámase *menor* de $(m-1)$-ésimo orden de un determinante dado de m-ésimo orden al determinante de $(m-1)$-ésimo orden obtenido a partir del determinante dado de m-ésimo orden suprimiendo una fila y una columna.

cial $\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}$ es continua y distinta de cero en el punto M_0''. Para hacerlo, calculemos la citada derivada parcial. Introduzcamos en las primeras $m-1$ ecuaciones del sistema (6.14) las funciones (6.18), que constituyen la solución de estas ecuaciones, y diferenciemos las identidades obtenidas respecto de u_m. Obtenemos

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_m}+\frac{\partial F_1}{\partial u_m}=0, \qquad (6.21^1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m}+\ldots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_m}+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m}=0. \quad (6.21^{m-1})$$

Luego, diferenciemos respecto de u_m la igualdad (6.19). Obtendremos

$$\frac{\partial F_m}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m}+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial u_m}+\frac{\partial F_m}{\partial u_m}=\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}. \qquad (6.21^m)$$

Multipliquemos las igualdades $(6.21^1)-(6.21^m)$ por los correspondientes complementos algebraicos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ de los elementos de la última columna del jacobiano (6.17) y sumemos, a continuación, estas igualdades. Obtendremos

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_m}\left[\Delta_1\frac{\partial F_1}{\partial u_k}+\Delta_2\frac{\partial F_2}{\partial u_k}+\ldots+\Delta_m\frac{\partial F_m}{\partial u_k}\right]+$$
$$+\left(\Delta_1\frac{\partial F_1}{\partial u_m}+\Delta_2\frac{\partial F_2}{\partial u_m}+\ldots+\Delta_m\frac{\partial F_m}{\partial u_m}\right)=\Delta_m\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}.$$

Por cuanto la suma de productos de elementos de la columna dada del determinante por los correspondientes complementos algebraicos de los elementos de esta (otra) columna es igual al determinante (al cero), cada corchete es igual a cero, mientras que lo que está encerrado entre paréntesis es igual al jacobiano (6.17).

De este modo, resulta

$$\Delta=\Delta_m\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}. \qquad (6.22)$$

Aquí, con el símbolo Δ está designado el jacobiano (6.17), y con Δ_m, el complemento algebraico del último elemento de la última columna, el cual coincide con el menor contorneado y es, por suposición, *distinto de cero* en el punto M_0. Al dividir la igualdad (6.22) por Δ_m, encontramos definitivamente

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}=\frac{\Delta}{\Delta_m}. \qquad (6.23)$$

La fórmula (6.23), válida en el punto M_0'', demuestra la continuidad de la derivada parcial $\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}$ en el punto M_0'' (pues, Δ y Δ_m

se componen de las derivadas parciales de las funciones (6.16) respecto de $u_1, u_2, \ldots, u_m$, continuas en el punto M_0). Además, de la fórmula (6.23) se deduce que $\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}$ en el punto M_0' es distinta de cero (puesto que el jacobiano Δ es distinto de cero en el punto M_0). Con ello queda demostrado que a la ecuación (6.20) puede ser aplicado el teorema 6.1.

De conformidad con este teorema, para ε_m positivo suficientemente pequeño existe tal entorno del punto $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ del espacio R' que en cada punto dentro de los márgenes de este entorno está definida una función

$$u_m = \varphi_m (x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{6.24}$$

que satisface la condición $|u_m - \overset{\circ}{u}_m| < \varepsilon_m$ y que es, al subsistir esta condición, la única solución continua y diferenciable de la ecuación (6.20). Considerando que las funciones (6.18) son soluciones de las primeras $m-1$ ecuaciones (6.14) *para cualesquiera* $u_m, x_1, \ldots, x_n$ del entorno del punto M_0', e introduciendo la función hallada (6.24) en (6.18), obtenemos las funciones que sólo dependen de las variables $x_1, \ldots, x_n$:

$$u_1 = \Phi_1 [\varphi_m (x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n] = \varphi_1 (x_1, \ldots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{m-1} = \Phi_{m-1} [\varphi_m (x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n] = \varphi_{m-1} (x_1, \ldots, x_n).$$

(Estas funciones están designadas por los símbolos $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$). El teorema de diferenciabilidad de una función compuesta permite afirmar que cada una de las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ es diferenciable en el entorno del punto $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$. De este modo, hemos demostrado en definitiva que m funciones

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1 (x_1, \ldots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2 (x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m &= \varphi_m (x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{6.25}$$

satisfacen en el entorno del punto M_0' las condiciones $|u_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |u_m - \overset{\circ}{u}_m| < \varepsilon_m$ y constituyen, al subsistir estas condiciones, la única solución continua y diferenciable en cierto entorno del punto $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ del sistema (6.14).

Queda por demostrar que las funciones (6.25) constituyen la única solución del sistema (6.14) que satisface las condiciones

$|u_1-\overset{\circ}{u}_1|<\varepsilon_1, \ldots, |u_m-\overset{\circ}{u}_m|<\varepsilon_m$ (para $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ positivos suficientemente pequeños).

Supongamos que, además de las funciones (6.25), existen otras m funciones

$$\left.\begin{array}{l}\hat{u}_1=\hat{\psi}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \hat{u}_2=\hat{\psi}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{u}_m=\hat{\psi}_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{array}\right\} \qquad (6.25')$$

que también constituyen la solución del sistema (6.14) y que satisfacen las condiciones $|\hat{u}_1-\overset{\circ}{u}_1|<\varepsilon_1, \ldots, |\hat{u}_m-\overset{\circ}{u}_m|<\varepsilon_m$.

Entonces, por suposición de inducción, las primeras $m-1$ funciones (6.25) son, para $u_m=\hat{u}_m$ dado, la única solución diferenciable del sistema de las primeras $(m-1)$ ecuaciones (6.14). Mas, para u_m prefijado, la única solución del sistema de las primeras $(m-1)$ ecuaciones (6.14) se da mediante las igualdades (6.18). De este modo, son válidas las relaciones

$$\left.\begin{array}{l}\hat{u}_1=\Phi_1(\hat{u}_m, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{u}_{m-1}=\Phi_{m-1}(\hat{u}_m, x_1, \ldots, x_n).\end{array}\right\} \qquad (6.18')$$

en las cuales $\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1}$ son las mismas funciones que figuran en (6.18).

En tal caso la última ecuación de (6.14) y las relaciones (6.19) permiten afirmar que $\hat{u}_m$ es la única solución de la ecuación (6.20), es decir, $\hat{u}_m=u_m$.

Al haber la igualdad $\hat{u}_m=u_m$, de las relaciones (6.18') y (6.18) proviene en seguida que $\hat{u}_1=u_1, \ldots, \hat{u}_{m-1}=u_{m-1}$.

El teorema 6.2 está completamente demostrado.

2. Cálculo de las derivadas parciales de las funciones definidas implícitamente por un sistema de ecuaciones funcionales. Supongamos en este punto cumplidas las condiciones del teorema 6.2 y dediquémonos al cálculo de las derivadas parciales de las funciones (6.25). Pongamos las funciones (6.25) en el sistema de ecuaciones (6.14), de cuya solución sirven dichas funciones, y dife-

renciemos las identidades obtenidas respecto de x_l ($l = 1, 2, \ldots, n$). Resulta

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_l}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}+\frac{\partial F_1}{\partial x_l}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{\partial F_m}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_l}+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}+\frac{\partial F_m}{\partial x_l}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

Las igualdades (6.26) son un sistema lineal de ecuaciones respecto de m incógnitas $\frac{\partial u_1}{\partial x_l}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_l}$. El determinante de este sistema, el jacobiano (6.17), es distinto de cero en el entorno del punto M_0. Por consiguiente, el sistema (6.26) cuenta con la única solución determinada por las fórmulas de Cramer:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_l, u_{k+1}, \ldots, u_m)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}}.$$

Las expresiones para las derivadas parciales de segundo orden y de órdenes superiores*) pueden obtenerse diferenciando estas fórmulas.

3. Aplicación biunívoca de dos conjuntos de un espacio m-dimensional. Examinemos en cierto entorno de un punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ m funciones

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_m),\\ u_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_m),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_m &= \varphi_m(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned} \qquad (6.27)$$

Las m funciones en consideración realizan una aplicación de dicho entorno del punto M_0 sobre cierto conjunto $\{N\}$ del espacio m-dimensional de variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Esta aplicación se denomina *biunívoca* si a todo punto del entorno mencionado del punto M_0 le corresponde un solo punto del conjunto $\{N\}$, de suerte que en este caso cada punto del conjunto $\{N\}$ corresponde a un solo punto del citado entorno del punto M_0.

Del teorema 6.2 se deduce inmediatamente la afirmación siguiente.

Si las funciones (6.27) son diferenciables en un entorno del punto M_0, con la particularidad de que todas las derivadas parciales de primer orden son continuas en el propio punto M_0 y el jacobiano $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$ es distinto de cero en este punto, las funciones (6.27) aplican biunívocamente cierto entorno del punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ sobre cierto entorno del punto $N_0(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_m)$, donde $\overset{\circ}{u}_i = \varphi_i(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

En efecto, las relaciones (6.27) pueden considerarse como un sistema de ecuaciones funcionales respecto de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, para el cual se cumplen las condiciones del teorema 6.2. Pero, en este caso, el sistema tiene siempre en

*) La existencia de estas derivadas parciales se asegura por las restricciones adicionales que se imponen en las funciones (6.16).

cierto entorno del punto $N_0(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_m)$ la única solución

$$x_1 = \psi_1(u_1, \ldots, u_m),$$
$$x_m = \psi_m(u_1, \ldots, u_m). \qquad (6.27')$$

Es evidente que las funciones (6.27') realizan la aplicación inversa.

Notemos que en las condiciones de la afirmación enunciada, tanto las funciones (6.27) que realizan la aplicación directa, como las (6.27') que realizan la aplicación inversa, son *continuas*. Una aplicación biunívoca que posee esta propiedad se denomina *homeomorfa*.

§ 4. Dependencia de las funciones

1. Concepto de dependencia de las funciones. Condición suficiente de independencia. Supongamos que m funciones de unas mismas n variables

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (6.28)$$

están definidas y son diferenciables en cierto dominio *) D n-dimensional abierto.

Diremos que *una de estas funciones*, u_k, por ejemplo, *depende en el dominio D de las demás funciones si simultáneamente para todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del dominio D*

$$u_k = \Phi(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m), \qquad (6.29)$$

donde Φ es cierta función definida y diferenciable en un dominio correspondiente de variación de sus argumentos. Las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_m$ se denominarán *dependientes en el dominio D* si una de estas funciones (no importa, cuál) depende de las demás en el dominio D.

En cambio, si no existe una función diferenciable Φ tal que simultáneamente para todos los puntos del dominio D se verifique una identidad de la forma (6.29), las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_m$ se denominarán *independientes en el dominio D*.

EJEMPLOS 1. Es fácil convencerse de que tres funciones de cuatro variables

$$u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$u_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

*) En particular, a título de dominio D puede tomarse cierto entorno de un punto fijo M_0 de un espacio n-dimensional.

son dependientes en cualquier dominio D de un espacio cuadridimensional, pues para todos los puntos (x_1, x_2, x_3, x_4) de este dominio

$$u_1 = u_2^2 - u_3.$$

2. Mostremos ahora que dos funciones de dos variables $u_1 = x + y$ y $u_2 = x - y$ son independientes en cualquier dominio D del plano x, y que contiene el origen de las coordenadas. Está claro que la función u_1 conserva su valor nulo en la recta $x + y = 0$ que pasa por el origen de las coordenadas (fig. 6.5). Pero, sobre esta recta la función u_2 tiene valor variable $u_2 = 2x$. Por eso, en este tramo de la recta, dispuesto en el interior de D, u_2 no depende de u_1, n ciencia cierta. Es análoga la demostración de que sobre un tramo de la recta $x - y = 0$, dispuesto en el interior del dominio D, $u_2 = 0$, $u_1 = 2x$, y, por consiguiente, u_1 no depende de u_2.

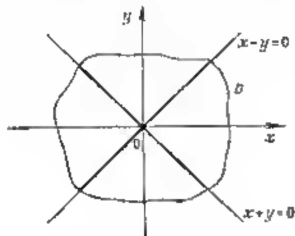


Fig. 6.5

OBSERVACIÓN. En el curso de álgebra lineal se introduce la noción de *dependencia lineal* de las funciones: m funciones $u_1, u_2, \ldots, u_m$ se llaman linealmente dependientes en un dominio D si para todos los puntos del dominio D una de estas funciones se expresa en forma de una función lineal de las demás funciones. Está claro que la dependencia lineal de las funciones es un caso particular de la dependencia de estas funciones, pues, si las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son linealmente dependientes en el dominio D, son dependientes en dicho dominio, pero existen funciones dependientes en el dominio D sin ser en D linealmente dependientes (por ejemplo, las funciones escritas en el ejemplo 1).

Teorema 6.3. (condición suficiente de dependencia de las funciones). *Supongamos que m funciones de $n \geqslant m$ variables*

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

están definidas y son diferenciables en un entorno del punto $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m, \overset{\circ}{x}_{m+1}, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$. Entonces, si el jacobiano formado a partir de estas funciones respecto de algunas m variables es distinto de cero en el punto M_0, las citadas funciones son independientes en cierto entorno del punto M_0.

DEMOSTRACIÓN. Sin limitar la generalidad, convengamos en considerar que en el punto M_0 está distinto de cero un jacobiano

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}. \tag{6.30}$$

Demostremos el teorema reduciéndolo al absurdo. Supongamos que las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son dependientes en cierto entorno del punto M_0, es decir, una de estas funciones, u_k, por ejemplo, se expresa para todos los puntos de este entorno en la forma

$$u_k = \Phi(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m),$$

donde Φ es una función diferenciable. Haciendo uso de la regla de diferenciación de una función compuesta, calculemos la derivada de la función u_k respecto de cualquiera de las variables x_l

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_l} + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}}\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \quad (l = 1, 2, \ldots, m). \quad (6.31)$$

Las fórmulas (6.31), si se toman para cada valor $l = 1, 2, \ldots, m$ en el punto M_0, dejan constancia de que la k-ésima fila del jacobiano (6.30) es una combinación lineal de las demás filas, cuyos coeficientes son iguales, respectivamente, a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}.$$

Pero, en este caso el jacobiano (6.30) es igual a cero en el punto M_0, lo que contradice las condiciones del teorema.

EJEMPLO. Las dos funciones examinadas anteriormente $u_1 = x + y$ e $u_2 = x - y$ son independientes en el entorno de cualquier punto $M(x, y)$, puesto que el jacobiano $\frac{D(u_1, u_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ en todo punto.

2. Matrices funcionales y sus aplicaciones. Examinemos otra vez m funciones de n variables (6.28):

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}\right\} \quad (6.28)$$

Esta vez supongamos que las funciones (6.28) *están definidas y son diferenciables en cierto entorno del punto* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$, *con la particularidad de que todas las derivadas parciales de primer orden de estas funciones son continuas en el propio punto* M_0.

Formemos a partir de las derivadas parciales de las funciones (6.28) la siguiente matriz funcional

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|. \tag{6.32}$$

que contiene m filas y n columnas.

Tiene lugar la afirmación siguiente.

Teorema 6.4. *Supongamos que en la matriz funcional* (6.32): 1) *cierto menor de r-ésimo orden* *) *es distinto de cero en el punto* $M_0(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$, 2) *todos los menores de* $(r+1)$*-ésimo orden son nulos en cierto entorno del punto* M_0 **). *Entonces, las r funciones representadas en el citado menor de r-ésimo orden, son independientes en el entorno del punto* M_0; *cada una de las demás funciones depende en dicho entorno de las r funciones mencionadas.*

DEMOSTRACIÓN. Sin perder la generalidad de los razonamientos, convengamos en considerar que en el punto M_0 es distinto de cero el menor dispuesto en la esquina superior izquierda de la matriz (6.32), es decir, es distinto de cero el determinante

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_r} \end{matrix} \right| \tag{6.33}$$

Entonces, la independencia en el entorno del punto M_0 de las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_r$ se deduce en seguida del teorema 6.3. Resta por demostrar que cualquiera de las funciones $u_{r+1}, \ldots, u_m$ ***) depende en el entorno del punto M_0 respecto de $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Demostremos, por ejemplo, que u_{r+1} *depende en el entorno del punto* M_0 de $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Prestaremos nuestra atención a las primeras r funciones (6.28). Si designamos por $\overset{0}{u}_1, \ldots, \overset{0}{u}_r$ los números de tipo $\overset{0}{u}_1 = \varphi_1(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n), \ldots, \overset{0}{u}_r = \varphi_r(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$, siempre en cierto entorno del punto $N_0(\overset{0}{u}_1, \ldots, \overset{0}{u}_r, \overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n)$ del es-

*) Recordemos que se llama *menor* de r-ésimo orden de una matriz dada un determinante formado de los elementos dispuestos en la intersección de algunas r columnas con r filas de la matriz.

**) Cuando $r = \min(m, n)$, la exigencia 2) ha de omitirse.

***) Por supuesto, se supone en este caso que $m > r$.

pacio $(n+r)$-dimensional las primeras r funciones (6.28) son la única solución diferenciable del siguiente sistema de ecuaciones *):

$$\left.\begin{array}{l} F_1(u_1, \ldots, u_r, x_1, \ldots, x_n) \equiv \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) - u_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_r(u_1, \ldots, u_r, x_1, \ldots, x_n) \equiv \varphi_r(x_1, \ldots, x_n) - u_r = 0. \end{array}\right\} \quad (6.34)$$

Por otra parte, como el jacobiano

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)},$$

que coincide con el menor (6.33), es distinto de cero en el punto N_0, el sistema (6.34) puede *resolverse unívocamente* en el entorno de este punto *respecto de* $x_1, \ldots, x_r$. Dicho de otro modo, en un entorno suficientemente pequeño del punto N_0 el sistema (6.34) siempre tiene una única solución diferenciable

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \psi_1(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \psi_r(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n). \end{array}\right\} \quad (6.35)$$

Subrayemos que las igualdades (6.35) y las primeras r igualdades de (6.28) son plenamente equivalentes en el entorno del punto N_0. En particular, si introducimos $x_1, x_2, \ldots, x_r$, definidas mediante las ecuaciones (6.35), en las primeras r igualdades (6.28), las citadas igualdades pasarán a ser identidades respecto de $x_{r+1}, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_r$. Diferenciando estas identidades respecto de la variable x_l $(l = r+1, \ldots, n)$ y advirtiendo que $u_1, \ldots, u_r$ no dependen de $x_{r+1}, \ldots, x_n$, tendremos

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_r}\frac{\partial\psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_l} = 0, \qquad (6.36^1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_r}\frac{\partial\psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_l} = 0. \qquad (6.36^r)$$

Notemos que las igualdades (6.36^1) — (6.36^r) son válidas para todos los valores de las variables $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ de cierto entorno del punto M_0.

Con el fin de cerciorarnos de que la función u_{r+1} depende en cierto entorno del punto M_0 respecto de $u_1, \ldots, u_r$, pongamos los valo-

*) En efecto, en el punto citado N_0 todas las funciones $F_1, \ldots, F_r$ se anulan, mientras que el jacobiano $\frac{D(F_1, \ldots, F_r)}{D(u_1, \ldots, u_r)} = (-1)^r \neq 0$, de suerte que quedan cumplidas las condiciones del teorema 6.2.

res $x_1, \ldots, x_r$, definidos mediante las ecuaciones (6.35), en la $(r + 1)$-ésima ecuación de (6.28). En este caso u_{r+1} se convierte en una función de los argumentos $u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$, pues $u_{r+1} = \varphi_{r+1}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = \varphi_{r+1}[\psi_1(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \ldots, \psi_r(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), x_{r+1}, \ldots, x_n] = \Phi(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ (esta función fue denotada por el símbolo Φ). Resta por demostrar que para todos los valores de las variables $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$, dispuestos en un entorno suficientemente pequeño del punto M_0, la función Φ *no depende de* $x_{r+1}, \ldots, x_n$). Con este fin basta probar que para todos los $x_1, \ldots, x_n$ de un entorno suficientemente pequeño del punto M_0 se verifican las igualdades

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0 \quad (l = r+1, \ldots, n). \tag{6.37}$$

Diferenciemos la función Φ respecto de la variable x_l $(l = r+1, \ldots, n)$ como una función compuesta. Obtendremos

$$\frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}. \tag{6.36^{r+1}}$$

Veamos ahora el siguiente menor de $(r + 1)$-ésimo orden de la matriz (6.32):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} \\ \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_l} \end{vmatrix}. \tag{6.38}$$

Por la hipótesis del teorema este menor *es siempre igual a cero en el entorno del punto* M_0. Multipliquemos las igualdades (6.36^1) — (6.36^{r+1}) por los complementos algebraicos correspondientes $\Delta_1, \ldots, \Delta_r, \Delta_{r+1}$ de los elementos de la última columna del menor (6.38) y, a continuación, sumemos todas estas igualdades. En virtud del teorema de que la suma de productos de los elementos de una columna dada por los complementos algebraicos correspondientes de los elementos de esta (otra) columna es igual al determinante (al cero), obtendremos *)

$$\Delta = \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\Delta_{r+1}. \tag{6.39}$$

En la igualdad (6.39) el símbolo Δ denota el menor (6.38), igual a cero siempre en el entorno del punto M_0, y el complemento algebraico

*) Repetimos los razonamientos descritos detalladamente en la pág. 259.

Δ_{r+1} coincide con el menor (6.33), distinto de cero en el punto M_0, y, por tanto, en cierto entorno de este punto *). De la igualdad (6.39) concluimos que en cierto entorno del punto M_0 las igualdades (6.37) son siempre válidas. El teorema está demostrado.

EJEMPLO. Volvamos a analizar la dependencia de las funciones

$$u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$u_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

La matriz funcional (6.32) tiene por expresión

$$\left\| \begin{matrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2(x_2+x_3+x_4) & 2(x_1+x_3+x_4) & 2(x_1+x_2+x_4) & 2(x_1+x_2+x_3) \end{matrix} \right\|.$$

Es fácil convencerse de que todos los determinantes de tercer orden son idénticamente iguales a cero, con la particularidad de que en cualquier punto del espacio (x_1, x_2, x_3, x_4), en el que no coinciden las cuatro coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4, por lo menos uno de los determinantes de segundo orden

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

es distinto de cero. Por consiguiente, en el entorno de cualquier punto mencionado las funciones u_1 y u_2 son dependientes, mientras que u_3 depende de u_1 y u_2.

§ 5. Extremo condicionado

1. Concepto de extremo condicionado. En el § 6 del cap. 5 buscamos extremos locales de unas funciones cuyos argumentos no están relacionados con condiciones adicionales algunas. Pero, en las matemáticas y en sus aplicaciones se encuentra a menudo *un problema de búsqueda de los extremos de una función cuyos argumentos satisfacen ciertas condiciones adicionales de conexión.* Llamaremos los extremos de este género *condicionados* con el fin de distinguirlos de los extremos (incondicionales) estudiados en el § 6, cap. 5.

Demos a conocer un ejemplo de problema de búsqueda de un extremo condicionado. Se pide hallar el extremo de una función $u =$

*) Por cuanto todas las derivadas parciales del menor (6.33) son continuas en el punto M_0, lo será también en el punto M_0 el propio menor (6.33). Mas, en este caso, de conformidad con el teorema de estabilidad del signo de una función continua, este menor es distinto de cero no sólo en el propio punto M_0, sino también en cierto entorno del mismo.

$= x^2 + y^2$ a condición de que los argumentos de esta función satisfagan la condición de conexión $x + y - 1 = 0$. De este modo, los extremos de la función $u = x^2 + y^2$ se buscan *no en todo el plano Oxy, sino sólo en la recta $x + y - 1 = 0$*. Para resolver el problema planteado, pongamos en la ecuación de la función $u = x^2 + y^2$ el valor de y determinado a partir de la condición de conexión $x + y - 1 = 0$. De este modo reducimos el problema planteado a un problema de búsqueda del extremo incondicional de la función $u = 2x^2 - 2x + 1$.

El último extremo se halla sin dificultades algunas: por cuanto $u' = 4(x - 1/2)$, $u'' = 4$, la función $u = 2x^2 - 2x + 1$ tiene su mínimo $u = 1/2$ para $x = 1/2$. De este modo, la función $u = x^2 + y^2$ con la condición de conexión $x + y - 1 = 0$ cuenta con el mínimo condicionado $u = 1/2$ en el punto $(1/2, 1/2)$. Advirtamos que el mínimo incondicional de la función $u = x^2 + y^2$ se alcanza en el punto $(0, 0)$ y es igual a $u = 0$. Además, incluso los razonamientos ilustrativos (fig. 6.6) evidencian que el mínimo de la función $u = x^2 + y^2$ (de cuyo gráfico sirve un paraboloide de revolución) en todo el plano Oxy no coincide con su mínimo en la recta $x + y - 1 = 0$.

Fig. 6.6

Pasemos al planteamiento general del problema de búsqueda de extremo condicionado. Supongamos que se pide hallar un extremo de la función de $m + n$ variables

$$u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \tag{6.40}$$

al haber m condiciones de conexión

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{array}\right\} \tag{6.41}$$

Precisemos, ante todo, el propio concepto de extremo condicionado de la función (6.40), al haber las conexiones (6.41). Diremos *que la función* (6.40) *tiene, al haber las conexiones* (6.41), *un máximo (mínimo) condicionado en el punto $M_0(\overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n, \overset{0}{y}_1, \ldots, \overset{0}{y}_m)$ cuyas coordenadas satisfacen las condiciones de conexión* (6.41), *si existe un entorno del punto M_0, en cuyos márgenes el valor de la función* (6.40)

en el punto M_0 es el máximo (el mínimo) entre sus valores en todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen las condiciones de conexión (6.41).

Para hallar el extremo condicionado de la función (6.40), al haber las relaciones (6.41), supongamos que las funciones de los miembros izquierdos de las igualdades (6.41) son diferenciables en cierto entorno del punto en consideración M_0, y, además, en el propio punto M_0 las derivadas parciales de las funciones mencionadas respecto de $y_1, \ldots, y_m$ son continuas, y el jacobiano

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \tag{6.42}$$

es distinto de cero.

En virtud del teorema 6.2, para los números positivos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ suficientemente pequeños existe tal entorno del punto $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ de un espacio de variables $(x_1, \ldots, x_n)$ que dentro de este entorno siempre hay definidas m funciones

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ y_2 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n), \end{array}\right\} \tag{6.43}$$

que satisfacen las condiciones $|y_1 - \overset{\circ}{y}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |y_m - \overset{\circ}{y}_m| < \varepsilon_m$ y que son, al haber dichas condiciones, la solución del sistema de ecuaciones (6.41), la única y diferenciable. Al introducir las funciones halladas (6.43) en (6.40), reducimos el problema de existencia de un extremo condicionado en el punto M_0 para la función (6.40), al haber las conexiones (6.41), a un problema de existencia de extremo incondicional en el punto M_0' para la función compuesta de los argumentos $x_1, \ldots, x_n$

$$u = f[x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots \\ \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)] = \Phi(x_1, \ldots, x_n). \tag{6.44}$$

El problema de existencia de extremo incondicional de la función (6.44) puede ser resuelto por los métodos aducidos en el § 6, cap. 5 *). El esquema general de reducción del extremo condicionado a un incondicional, que acabamos de exponer, fue realizado por nosotros en el ejemplo particular examinado más arriba. Ahora, procuremos establecer por lo menos las condiciones necesarias de existencia de un extremo condicionado en el punto M_0, *sin recurrir a la resolución del sistema* (6.41). Así, pues, supongamos que la función (6.40)

---

*) En este *caso* se debe imponer, naturalmente, ciertas condiciones en la función (6.40).

es diferenciable en el punto M_0 y tiene en el mismo un extremo condicionado al haber las relaciones (6.41), o bien (lo que es lo mismo) la función (6.44) tiene en el punto M_0' un extremo incondicional. De acuerdo con lo establecido en el § 6, cap. 5, una condición necesaria de extremo incondicional de la función $u = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ en el punto M_0' consiste en que sea igual a cero en este punto la diferencial de la citada función

$$du = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0, \qquad (6.45)$$

idéntico respecto de $dx_1, \ldots, dx_n$. Teniendo en cuenta la invariación de la forma de la primera diferencial y la igualdad (6.44), podemos escribir la fórmula (6.45) en la forma

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_m} dy_m = 0 \qquad (6.46)$$

(En esta fórmula todas las derivadas parciales se toman en el punto M_0.) Subrayemos, sin embargo, que en la igualdad (6.46) $dy_1, \ldots, dy_m$ son diferenciales de las funciones (6.43), de modo que la igualdad (6.46) no es una identidad respecto de $dy_1, \ldots, dy_m$. Supongamos ya introducidas en la ecuación de conexión (6.41) las funciones (6.43) que constituyen la solución del sistema (6.41). En este caso las ecuaciones (6.41) pasarán a ser identidades y obtendremos, diferenciando dichas identidades:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0 \end{array}\right\} \qquad (6.47)$$

Dado que el jacobiano (6.42) es, por suposición, distinto de cero en el punto M_0, $dy_1, \ldots, dy_m$ pueden ser expresadas a partir del sistema lineal (6.47) como funciones lineales de $dx_1, \ldots, dx_n$. Si hallamos estas expresiones y las ponemos en (6.46), entonces, al reunir en la igualdad obtenida los términos que contienen $dx_1, \ldots, dx_n$, obtendremos

$$A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n = 0, \qquad (6.48)$$

donde $A_1, \ldots, A_n$ denotan ciertas funciones racionales de las derivadas parciales $f, F_1, \ldots, F_m$ en el punto M_0. Por cuanto en la igualdad (6.48) figuran *sólo las diferenciales de las variables independientes*, de esta igualdad concluimos que $A_1 = 0, \ldots, A_n = 0$.

Adjuntando a las igualdades mencionadas m condiciones de conexión (6.41), obtendremos condiciones necesarias de existencia de un extremo condicionado de la función (6.40), al haber las conexiones (6.41), en la forma

$$A_1 = 0, \ldots, A_n = 0, \ F_1 = 0, \ldots, F_m = 0. \qquad (6.49)$$

Las igualdades (6.49) son un sistema de $m + n$ ecuaciones para determinar $m + n$ coordenadas del punto de extremo eventual.

2. Método de multiplicadores indeterminados de Lagrange. Exponiendo el método de buscar los puntos de extremo condicionado eventual, hemos perturbado la simetría con relación a las variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. Una parte de estas variables, $x_1, \ldots, x_n$, se consideraban como independientes; las demás variables, como funciones de dichas variables. En una serie de los casos esto complica los cálculos. Lagrange propuso un método que simetriza el papel de las variables. El presente punto está dedicado a la exposición de este método. Multipliquemos las igualdades (6.47) por los factores constantes arbitrarios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (por ahora indeterminados), respectivamente. Sumemos término a término la igualdad (6.46) con las igualdades obtenidas como resultado de la multiplicación. De resultas se obtiene la igualdad siguiente:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial y_m}dy_m = 0, \quad (6.50)$$

donde el símbolo $\Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ designa la función siguiente

$$\Psi = f + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m. \qquad (6.51)$$

En lo ulterior llamaremos esta función *función de Lagrange*. Considerando que para las funciones (6.41) están cumplidas las condiciones enunciadas en el punto antecedente y que la función (6.40) es diferenciable, elijamos los factores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de modo que se verifiquen las igualdades

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial\Psi}{\partial y_m} = 0. \qquad (6.52)$$

Esto puede realizarse a ciencia cierta, pues las igualdades (6.52) conducen a un sistema lineal

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1 \dfrac{F_1}{\partial y_m} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0 \end{array}\right\}$$

cuyo determinante (jacobiano (6.42)) es distinto de cero. En virtud de las igualdades (6.52), la igualdad (6.50) toma la forma

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n = 0. \qquad (6.53)$$

Bajo las suposiciones admitidas más arriba las variables $x_1, \ldots, x_n$ son *independientes*, razón por la cual de la igualdad (6.53) deducimos que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0. \qquad (6.54)$$

Al adjuntar a las ecuaciones (6.52) y (6.54) las condiciones de conexión (6.41), obtendremos un sistema de $n + 2m$ ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0, \; \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0, \\ F_1 = 0, \ldots, F_m = 0 \end{array}\right\} \qquad (6.55)$$

para determinar $n + m$ coordenadas de los puntos de extremo condicionado eventual y m factores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. En la práctica, al realizar este método, se procede del modo siguiente. Se forma la función de Lagrange (6.51) y *se hallan para esta función los puntos de extremo incondicional eventual*. Con el fin de excluir los factores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, se atraen las condiciones de conexión (6.41). Este camino de buscar los puntos de extremo condicionado eventual es legítimo, pues conduce precisamente al sistema de $n + 2m$ ecuaciones (6.55). Más abajo, en el p. 4, veremos un ejemplo de aplicación del método de multiplicadores de Lagrange.

3. Condiciones suficientes. En este punto examinaremos uno de los procedimientos de análisis adicional de los puntos de extremo condicionado eventual. Supongamos que en el punto M_0 se cumplen las condiciones necesarias de extremo (6.55). Además, exijamos complementariamente que las funciones (6.40) y (6.41) sean dos veces diferenciables en un entorno del punto M_0 y que sean continuas todas las derivadas parciales de segundo orden en el propio punto M_0. La construcción de la función de Lagrange (6.51) sugiere, evidentemente, que, *al haber las conexiones* (6.41), los extremos de la función (6.40) y de la función de Lagrange coinciden *). Pero, en tal caso, de los resultados del § 6, cap. 5 se desprende que para obtener una condición suficiente de extremo de la función (6.40) en el punto M_0 en presencia de las conexiones (6.41), *se debe adjuntar a las condiciones* (6.55) *el requisito de que $d^2\Psi$ sea de signo definido en este punto*. Enton-

*) Esto se deduce de que, al haber las conexiones (6.41), la diferencia $f(M) - f(M_0)$ coincide con la diferencia $\Psi(M) - \Psi(M_0)$.

ces, de conformidad con los resultados del párrafo 6, cap. 5, podemos constatar un mínimo en el punto M_0, siempre que, al haber las conexiones (6.41), $d^2\Psi\,|_{M_0} > 0$, y un máximo, si $d^2\Psi\,|_{M_0} < 0$. Demos a conocer algunas observaciones más de carácter práctico. Notemos, ante todo, que *la segunda diferencial $d^2\Psi$ puede calcularse en el punto dado M_0 de extremo eventual, como si fueran independientes todas las variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$.* Efectivamente, la segunda diferencial $d^2\Psi$ de la función Ψ no posee, por regla general, la propiedad de invariación de la forma y tendría que definirse, considerando la dependencia entre $y_1, \ldots, y_m$ y $x_1, \ldots, x_n$, mediante la igualdad

$$d^2\Psi = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + dy_m \frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2 \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} d^2y_1 + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} d^2y_m.$$

Pero, en el punto de extremo eventual M_0 se verifican las igualdades

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0,$$

de modo que $d^2\Psi$ se define mediante la misma fórmula

$$d^2\Psi = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + dy_m \frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2 \Psi \qquad (6.56)$$

que se emplea cuando todas las variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ se consideran independientes. Notemos, luego, que cuanto se necesita establecer tiene o no signo definido $d^2\Psi$ *sólo en presencia de las conexiones* (6.41), al realizar los cálculos, en la fórmula (6.56) para $d^2\Psi$ hay que sustituir $dy_1, \ldots, dy_m$ por sus valores definidos a partir del sistema (6.47). A continuación, hay que estudiar la cuestión de es o no de signo definido en el punto dado M_0 la diferencial $d^2\Psi$. Ahora podemos examinar un ejemplo.

4. **Ejemplo.** Supongamos que hemos de hallar los valores máximo y mínimo de un determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & \ldots & z_n \end{vmatrix}, \qquad (6.57)$$

conociendo la suma de cuadrados de los elementos de cada fila de este determinante. El problema consiste en

hallar los valores extremos de una función de n^2 variables (6.57), al haber las siguientes n condiciones de conexión *):

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2+y_1^2+\ldots+z_1^2=h_1,\\ x_2^2+y_2^2+\ldots+z_2^2=h_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n^2+y_n^2+\ldots+z_n^2=h_n\end{array}\right\} \qquad (6.58)$$

donde $h_1, h_2, \ldots, h_n$ son unos números positivos dados **). Para resolver el problema planteado, veamos y resolvamos un problema más simple. *En el punto extremal del determinante* (6.57), *fijemos los elementos de todas las filas, a excepción de la k-ésima fila.* En este caso el determinante (6.57) puede considerarse como función de n variables $x_k, y_k, \ldots, z_k$. La expresión explícita de esta función puede obtenerse desarrollando el determinante según los elementos de la k-ésima fila:

$$\Delta = x_kX_k + y_kY_k + \ldots + z_kZ_k. \qquad (6.59)$$

Aquí, con $X_k, Y_k, \ldots, Z_k$ están designados los complementos algebraicos de los elementos correspondientes $x_k, y_k, \ldots, z_k$. Por cuanto los elementos de todas las filas del determinante, salvo la k-ésima, están fijos en el punto extremal, los complementos $X_k, Y_k, \ldots, Z_k$ pueden considerarse como números constantes. Veamos un problema de búsqueda de los *extremos de la función* (6.59), *al haber una sola condición de conexión* ***)

$$x_k^2+y_k^2+\ldots+z_k^2=h_k. \qquad (6.60)$$

Para resolver este problema, formemos una función de Lagrange

$$\Psi = x_kX_k + y_kY_k + \ldots + z_kZ_k + \lambda(x_k^2 + y_k^2 + \ldots$$
$$\ldots + z_k^2 - h_k), \qquad (6.61)$$

y resolvemos para dicha función la cuestión de extremo incondicional. De las condiciones

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_k} = X_k + 2\lambda x_k = 0,$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial y_k} = Y_k + 2\lambda y_k = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial\Psi}{\partial z_k} = Z_k + 2\lambda z_k = 0$$

encontramos las coordenadas del punto de extremo eventual

$$x_k = -\frac{X_k}{2\lambda}, \quad y_k = -\frac{Y_k}{2\lambda}, \ \ldots, \quad z_k = -\frac{Z_k}{2\lambda}. \qquad (6.62)$$

*) El problema de *existencia* de los valores extremos no da lugar a dudas, pues la función (6.57) es una función *continua* de sus n^2 variables sobre un conjunto cerrado (6.58).

**) Omitimos un caso trivial cuando por lo menos uno de los números $h_1, h_2, \ldots, h_n$ es igual a cero. En este caso el determinante (6.57) es idénticamente igual a cero.

***) A título de esta condición tomamos la k-ésima de las condiciones (6.58).

El factor constante λ se excluye fácilmente de la condición de conexión (6.60). De esta condición encontramos dos valores:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{X_k^2+Y_k^2+\ldots+Z_k^2}{4h_k}} > 0, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{X_k^2+Y_k^2+\ldots+Z_k^2}{4h_k}} < 0.$$

(En este caso omitimos de nuevo el caso trivial cuando todos los X_k, Y_k, ..., Z_k son nulos, pues en este caso el determinante (6.59) es idénticamente igual a cero.)

De este modo, obtenemos dos puntos de extremo eventual:

$$M_1\left(-\frac{X_k}{2\lambda_1}, -\frac{Y_k}{2\lambda_1}, \ldots, -\frac{Z_k}{2\lambda_1}\right) \text{ y}$$
$$M_2\left(-\frac{X_k}{2\lambda_2}, -\frac{Y_k}{2\lambda_2}, \ldots, -\frac{Z_k}{2\lambda_2}\right).$$

Demostremos que en el punto M_1 se realiza el mínimo condicionado, y en el M_2, el máximo condicionado. Con este fin, calculemos la segunda diferencial $d^2\Psi$ de la función de Lagrange (6.61). Es fácil ver que

$$d^2\Psi = 2\lambda\,[(dx_k)^2 + (dy_k)^2 + \ldots + (dz_k)^2].$$

De la última fórmula se deduce que $d^2\Psi$ es una forma cuadrática definida positiva para $\lambda = \lambda_1 > 0$ (es decir, en el punto M_1), y definida negativa, para $\lambda = \lambda_2 < 0$ (es decir, en el punto M_2). Así, pues la función (6.59) tiene, al haber la conexión (6.60) mínimo condicionado en el punto M_1 y máximo condicionado en el punto M_2. Sin calcular los valores máximo y mínimo de la función (6.59), al haber la condición (6.60), notemos que en un punto, donde se alcanzan dichos valores, se verifican las igualdades (6.62), y, por consiguiente, son también válidas las igualdades

$$\frac{x_k}{X_k} = \frac{y_k}{Y_k} = \ldots = \frac{z_k}{Z_k}. \tag{6.63}$$

Volvamos ahora al cálculo de los valores extremos del determinante (6.57) al haber n conexiones (6.58). Conservando el sentido de las designaciones admitidas X_k, Y_k, ..., Z_k, de acuerdo con la propiedad conocida del determinante, podemos escribir para todo i distinto de k

$$x_iX_k + y_iY_k + \ldots + z_iZ_k = 0 \ (i \neq k). \tag{6.64}$$

De las igualdades (6.63) y (6.64) encontramos que

$$x_ix_k + y_iy_k + \ldots + z_iz_k = 0 \text{ (para } i \neq k). \tag{6.65}$$

Las igualdades (6.58) y (6.65) y la regla de multiplicación de los determinantes permiten concluir que, al multiplicar el determinante Δ por sí mismo, se obtiene un determinante cuyos elementos son todos

iguales a cero, a excepción de los elementos de la diagonal principal, los cuales son iguales a $h_1, \ldots, h_2, \ldots, h_n$ respectivamente. De este modo,

$$\Delta\cdot\Delta = \Delta^2 = h_1 h_2 \ldots h_n.$$

Por consiguiente, los valores máximo y mínimo de la magnitud del determinante (6.57), al subsistir las condiciones (6.58), son iguales a $+\sqrt{h_1 h_2 \ldots h_n}$ y $-\sqrt{h_1 h_2 \ldots h_n}$, respectivamente. De este modo se obtiene que

$$|\Delta| = \sqrt{h_1 h_2 \ldots h_n},$$

o bien

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{(x_1^2+\ldots+z_1^2)(x_2^2+\ldots+z_2^2)\ldots(x_n^2+\ldots+z_n^2)}. \qquad (6.66)$$

La última desigualdad, válida para un determinante arbitrario (6.57), se llama *desigualdad de Hadamard* *).

OBSERVACIÓN. Cuando $n = 3$, la desigualdad de Hadamard (6.66) admite una interpretación geométrica simple. En este caso $|\Delta|$ es el volumen de un paralelepípedo construido sobre los segmentos OA_1, OA_2 y OA_3 que unen el origen de coordenadas O con los puntos $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$. La desigualdad (6.66) afirma que de todos los paralelepípedos, cuyas aristas tienen longitud dada, el volumen máximo lo tiene un paralelepípedo rectangular.

Complemento

Cambio de variables

En el análisis y en otros apartados de las matemáticas se encuentra un problema de cambio de variables. Este problema consiste en lo siguiente. Supongamos dada una expresión

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots\right), \qquad (6.67)$$

que contiene las variables independientes x, y, una función $z = z(x, y)$ y las derivadas parciales de la misma. En lugar de las variables independientes x, y y de la función $z = z(x, y)$ se introducen nuevas variables independientes u, v y una nueva función $w = w(u, v)$, con la particularidad de que vienen dadas unas relaciones por cuyo intermedio u, v y w se expresan en términos de x, y y z:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, z), \\ v &= \psi(x, y, z), \\ w &= \chi(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (6.68)$$

Se requiere transformar la expresión (6.67) respecto de las variables nuevas u, v y w. En este caso supondremos que las funciones (6.68) son diferenciables un

*) J. Hadamard (1865—1963), matemático francés.

número suficiente de veces y que el sistema (6.68) puede ser resuelto respecto de x, y y z, mientras que las primeras dos ecuaciones en (6.68) se resuelven respecto de x e y.

Es evidente que para resolver el problema planteado, basta expresar las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... en términos de u, v, w, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, ... Señalemos cómo se puede hacerlo.

Teniendo presente que $z = z(x, y)$ y $w = w(u, v)$, escribamos las primeras diferenciales de las funciones (6.68). Obtendremos

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right), \qquad (6.69)$$

$$dv = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right), \qquad (6.70)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right). \qquad (6.71)$$

Introduciendo en (6.71) du y dv determinadas por las fórmulas (6.69) y (6.70), e igualando los coeficientes de dx y dy, obtendremos un sistema de dos ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \frac{\partial w}{\partial v} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial u} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] + \frac{\partial w}{\partial v} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}, \end{aligned} \right\}$$

a partir del cual se expresan con facilidad $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}}.$$

Si la expresión (6.67) depende también de las derivadas parciales de segundo orden, para determinar estas últimas en términos de las derivadas parciales de w respecto de u y v, se debe escribir las primeras diferenciales de las derivadas de primer orden ya calculadas.

OBSERVACIÓN 1. De un modo análogo se realiza el cambio de las variables cuando las variables antiguas están asociadas con las nuevas no mediante las

relaciones (6.68), sino mediante las relaciones implícitas de la forma*)

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1(u, v, w, x, y, z)=0,\\ \Phi_2(u, v, w, x, y, z)=0,\\ \Phi_3(u, v, w, x, y, z)=0.\end{array}\right\} \qquad (6.72)$$

OBSERVACIÓN 2. Nos hemos limitado al caso de dos variables independientes sólo para abreviar las notaciones. El método aducido es aplicable para el caso de cualquier número de variables independientes (y, en particular, para el de una variable independiente.)

EJEMPLO. Sea z una función de las variables x e y. Transfórmese una expresión**)

$$F=\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

respecto de las coordenadas polares u y v:

$$x=u\cos v, \quad y=u\operatorname{sen} v. \qquad (6.73)$$

Advirtamos que en el ejemplo dado se realiza sólo el cambio de las variables independientes. La función z sigue invariable. De (15.73) se desprende que

$$dx=\cos v\,du-u\operatorname{sen} v\,dv, \quad dy=\operatorname{sen} v\,du+u\cos v\,dv,$$

por lo cual, de las relaciones

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\cos v\,du-u\operatorname{sen} v\,dv)+\frac{\partial z}{\partial y}(\operatorname{sen} v\,du+u\cos v\,dv)=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Igualando los coeficientes de du y dv, encontramos

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos v+\frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen} v=\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$-\frac{\partial z}{\partial x}u\operatorname{sen} v+\frac{\partial z}{\partial y}u\cos v=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

De aquí

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos v\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{1}{u}\operatorname{sen} v\dfrac{\partial z}{\partial v},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{sen} v\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{1}{u}\cos v\dfrac{\partial z}{\partial v}.\end{array}\right\} \qquad (6.74)$$

Hallemos ahora $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Por cuanto $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}$, de la primera fórmula

*) Se admite, por supuesto, la resolubilidad tanto respecto de u, v y w como también respecto de x, y y z.

**) La expresión citada se llama *operador de Laplace*. Ésta desempeña un papel importante en las matemáticas y en sus aplicaciones. P. S. Laplace (1749—1827), matemático, físico y astrónomo francés.

(6,74) encontramos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\cos v\,\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial u}-\frac{1}{u}\,\operatorname{sen} v\,\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial v}=$$
$$=\cos v\,\frac{\partial}{\partial u}\left[\cos v\,\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{u}\operatorname{sen} v\,\frac{\partial z}{\partial v}\right]-\frac{1}{u}\operatorname{sen} v\,\frac{\partial}{\partial v}\left[\cos v\,\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{u}\operatorname{sen} v\,\frac{\partial z}{\partial v}\right].$$

Después de los cálculos obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2 v\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{u}\operatorname{sen} v\cos v\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+$$
$$+\frac{1}{u^2}\operatorname{sen}^2 v\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{1}{u}\operatorname{sen}^2 v\,\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{2}{u^2}\operatorname{sen} v\cos v\,\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Análogamente, de la segunda fórmula (6,74), obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\operatorname{sen} v\,\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial u}+\frac{1}{u}\cos v\,\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial v}=$$
$$=\operatorname{sen}^2 v\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{2}{u}\operatorname{sen} v\cos v\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{u^2}\cos^2 v\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+$$
$$+\frac{1}{u}\cos^2 v\,\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{2}{u^2}\operatorname{sen} v\cos v\,\frac{\partial z}{\partial v}.$$

De este modo, en las coordenadas polares u y v el operador de Laplace $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ tiene por expresión.

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Capítulo 7

ALGUNAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

§ 1. Envolvente y curva discriminante de una familia monoparamétrica de curvas planas

1. Observaciones preliminares. Definiremos las curvas planas con ayuda de las ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha), \tag{7.1}$$

donde α es un parámetro, o bien con ayuda de las ecuaciones de la forma

$$F(x, y) = 0. \tag{7.2}$$

En lo que sigue más abajo nos harán falta los conceptos de puntos *ordinario* y *singular* de una curva.

Supongamos que una curva L se define mediante las ecuaciones paramétricas (7.1), con la particularidad de que las funciones $x = \varphi(\alpha)$ e $y = \psi(\alpha)$ tienen, para $\alpha = \alpha_0$, derivadas continuas. Un punto $M_0(x_0, y_0)$ de la curva L, cuyas coordenadas x_0 e y_0, son iguales a $\varphi(\alpha_0)$ y $\psi(\alpha_0)$, respectivamente, se llamará *ordinario* si

$$\varphi'^2(\alpha_0) + \psi'^2(\alpha) \neq 0. \tag{7.3}$$

En cambio, si para $\alpha = \alpha_0$, se verifica la relación

$$\varphi'^2(\alpha_0) + \psi'^2(\alpha_0) = 0, \tag{7.4}$$

el punto M_0 se llamará punto *singular* de la curva L.

Supongamos que la curva L se define mediante la ecuación (7.2), con la particularidad de que la función $F(x, y)$ es diferenciable en cierto entorno del punto $M_0(x_0, y_0)$ de esta curva y tiene en el mismo derivadas parciales continuas respecto de x e y. El punto $M_0(x_0, y_0)$ se llamará punto *ordinario* de la curva L si en este punto se verifica una relación *)

$$F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0. \tag{7.5}$$

Si, en cambio, en el punto M_0 se verifica la relación

$$F_x'^2 + F_y'^2 = 0, \tag{7.6}$$

llamaremos M_0 punto *singular* de la curva L. Cerciorémonos de que *si el punto M_0 de la curva L es ordinario, en cierto entorno de este punto la curva L es o bien la gráfica de cierta función diferenciable $y = f(x)$, o bien la gráfica de cierta función diferenciable $x = g(y)$*. Efectiva-

---

*) Los conceptos de puntos ordinario y singular para la curva (7.2) ya fueron introducidos en el p. 3, § 2, cap. 6.

mente, supongamos que la curva L se define mediante las ecuaciones paramétricas (7.1), y, además, queda cumplida la condición (7.3). De la continuidad de las derivadas $\varphi'(\alpha)$ y $\psi'(\alpha)$ para $\alpha = \alpha_0$ y de la condición (7.3) se deduce que en cierto entorno de α_0 al menos una de estas derivadas, por ejemplo, $\varphi'(\alpha)$, no es nula. Entonces, la función $x = \varphi(\alpha)$ es en el citado entorno diferenciable y estrictamente monótona. Bajo estas condiciones existe una función inversa diferenciable monótona $\alpha = \varphi^{-1}(x)$. Poniendo esta función en la expresión $y = \psi(\alpha)$, nos convencemos de que la curva L es en cierto entorno del punto M_0 la gráfica de la función diferenciable $y = f(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$. La validez de la afirmación enunciada para el caso en que la curva se define con ayuda de la ecuación (7.2) se infiere de que en el entorno de un punto ordinario subsiste el teorema 6.1 sobre las funciones implícitas y, por eso, el tramo de la curva adyacente a un punto ordinario es la gráfica de la función diferenciable $y = f(x)$ o de la función $g(y)$.

OBSERVACIÓN 1. En geometría el punto M_0 de la curva L se denomina ordinario si en cierto entorno de este punto la curva L es la gráfica de cierta función diferenciable, y singular, si en cualquier entorno de este punto la curva L no puede ser representada en forma de la gráfica de una función diferenciable. Hemos visto que un punto de la curva L, ordinario según nuestra definición, lo será también desde el punto de vista geométrico. Pueden aducirse ejemplos, cuando un punto de la curva, singular según nuestra definición, será ordinario desde el punto de vista geométrico. De este modo, nuestra definición de punto ordinario es más estrecha que la definición geométrica, pero más cómoda en las aplicaciones.

Introduzcamos ahora el concepto de *tangencia* de las curvas L_1 y L_2 en su punto común M_0. Diremos que las curvas L_1 y L_2 *son tangentes* en su punto común M_0, si ambas curvas tienen tangentes en el punto M_0 y estas tangentes coinciden.

En adelante nos hará falta *la condición de tangencia* de dos curvas L_1 y L_2.

Supongamos que la curva L_1 se define por la ecuación (7.1), y la curva L_2, por la (7.2), siendo $M_0(x_0, y_0)$ el punto común de dichas curvas (con la particularidad de que las coordenadas x_0 e y_0 corresponden al valor $\alpha = \alpha_0$ del parámetro α). Convengamos en considerar que el punto M_0 es punto *ordinario* de las curvas L_1 y L_2 y que estas curvas *son tangentes* en el punto M_0. Entonces, las citadas curvas representan en el entorno de M_0 las gráficas de unas funciones diferenciables. Consideraremos, para concretar, que L_1 y L_2 son las gráficas de las funciones $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$. Puesto que, por hipótesis, las curvas L_1 y L_2 son tangentes en el punto $M_0(x_0, y_0)$, los coeficientes angulares de las tangentes en M_0 a las gráficas de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son iguales, es decir,

$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0). \tag{7.7}$$

Utilizando las fórmulas de diferenciación de las funciones definidas paramétricamente (véase § 11, cap. 5, t. 1) y las fórmulas de diferenciación de las funciones implícitas (véase p. 2, § 2, cap. 6), obtenemos

$$f_1'(x_0)=\frac{\psi'(\alpha_0)}{\varphi'(\alpha_0)},\quad f_2'(x_0)=-\frac{F_x'(M_0)}{F_y'(M_0)}. \tag{7.8}$$

Las fórmulas (7.8) permiten atribuir a la igualdad (7.7) la forma siguiente

$$\frac{\psi'(\alpha_0)}{\varphi'(\alpha_0)}=-\frac{F_x'(M_0)}{F_y'(M_0)} \tag{7.9}$$

o bien

$$F_x'(M_0)\,\varphi'(\alpha_0)+F_y'(M_0)\,\psi'(\alpha_0)=0. \tag{7.10}$$

En adelante llamaremos la última relación *condición de tangencia en el punto M_0 de las curvas L_1 y L_2*, definidas por las ecuaciones (7.1) y (7.2), respectivamente. Omitiendo los argumentos de las funciones y haciendo uso de las designaciones $\varphi'=\frac{dx}{d\alpha}$ y $\psi'=\frac{dy}{d\alpha}$, escribiremos la condición de tangencia en la forma

$$F_x'\frac{dx}{d\alpha}+F_y'\frac{dy}{d\alpha}=0. \tag{7.11}$$

OBSERVACIÓN 2. Si en un punto común M_0 de las curvas L_1 y L_2, dadas por las ecuaciones (7.1) y (7.2), respectivamente, se cumple la condición de tangencia (7.10) (o, lo que es lo mismo, (7.11)), y si, además, el punto M_0 es punto ordinario de las curvas L_1 y L_2, entonces, L_1 y L_2 son tangentes en el punto M_0. En efecto, de las relaciones (7.3), (7.5) y de la condición (7.10) provienen o bien la condición (7.9), o bien la condición $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi'(\alpha_0)}=-\frac{F_y'(M_0)}{F_x'(M_0)}$, es decir, la igualdad entre los coeficientes angulares de las tangentes en el punto común M_0 de las curvas L_1 y L_2. Esto significa precisamente que las curvas L_1 y L_2 son tangentes en el punto M_0. Notemos que la condición de tangencia se cumple también cuando el punto M_0 es punto singular por lo menos de una de las curvas L_1 y L_2.

Así, pues, la condición de tangencia (7.10) se cumple tanto cuando las curvas L_1 y L_2 son tangentes en el punto M_0, como también en el caso en que M_0 es un punto singular por lo menos de una de estas curvas mencionadas.

2. Familias monoparamétricas de curvas planas. Puntos característicos de las curvas de una familia. En diferentes problemas físicos y geométricos se encuentran frecuentemente familias de curvas planas. En óptica geométrica se estudian, por ejemplo, los haces (familias) reflejados y refractados de rayos; en mecánica, las familias de

trayectorias posibles de una partícula material en un campo dado de fuerzas; en geometría, las familias de tangentes a las curvas. Uno de los métodos posibles de definir las familias de líneas de tal género consiste en lo siguiente. Se toma una función $F(x, y, \alpha)$ de tres variables

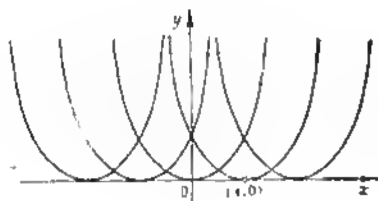


Fig. 7.1

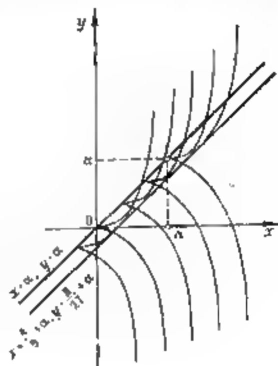


Fig. 7.2

x, y, α y para cada valor del parámetro α del conjunto dado $\{\alpha\}$ *) se define una curva de la familia mediante la ecuación

$$F(x, y, \alpha) = 0. \qquad (7.12)$$

Diremos que la relación (7.12) define *una familia monoparamétrica de curvas planas*. Llamaremos el parámetro α parámetro de la familia.

Veamos los ejemplos de familias monoparamétricas de curvas planas.

1°. La ecuación $y - (x - \alpha)^2 = 0$ define una familia de parábolas que se obtienen desplazando a lo largo del eje Ox de la parábola $y - x^2 = 0$ (fig. 7.1).

2°. La ecuación $(y - \alpha)^2 - (x - \alpha)^3 = 0$ define una familia de parábolas semicúbicas que se obtienen desplazando a lo largo de la bisectriz del primer ángulo coordenado de una parábola semicúbica $y^2 = x^3$ (fig. 7.2).

Supongamos que la función $F(x, y, \alpha)$ es diferenciable en el dominio de su definición. En este caso podemos introducir la noción de *punto característico* de la familia de curvas definida mediante la relación (7.12). Un punto $M(x, y)$ se denomina *punto característico*

*) El conjunto $\{\alpha\}$ representa, corrientemente, un intervalo.

de la familia de curvas (7.12), correspondiente al valor dado α del parámetro de la familia, si las coordenadas x e y de este punto satisfacen un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

He aquí la interpretación geométrica del punto característico de la familia de curvas (7.12). Para simplificar, limitémonos al caso en que cualesquiera dos curvas de la familia se intersecan *). Sean



Fig. 7.3

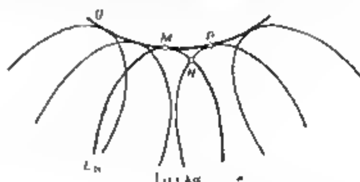


Fig. 7.4

L_α y $L_{\alpha+\Delta\alpha}$ dos curvas de la familia (7.12), correspondientes a los valores del parámetro α y $\alpha + \Delta\alpha$ (fig. 7.3). Las coordenadas del punto N de su intersección satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

o bien un sistema equivalente

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$
$$\frac{F(x, y, \alpha+\Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Si $\Delta\alpha \to 0$, el punto N, dispuesto en la curva $F(x, y, \alpha) = 0$, tiende, en el caso general, hacia cierto punto M en esta curva. Por cuanto $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \frac{F(x, y, \alpha+\Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\alpha\Delta} = F'_\alpha(x, y, \alpha)$, las coordenadas del punto M satisfacen las ecuaciones (7.13), por lo cual el punto M es punto característico de una curva de la familia. Así, pues, el punto característico de una curva dada es un punto que sirve de límite, para $\Delta\alpha \to \to 0$, de los puntos de intersección de la curva dada L_α con la curva $L_{\alpha+\Delta\alpha}$, próxima a ella.

3. Envolvente y curva discriminante de una familia monoparamétrica de curvas planas. Supongamos que una familia monopara-

*) Existen familias de curvas en que dos curvas cualesquiera no se intersecan. Como ejemplo de tal familia puede servir una familia de parábolas definidas mediante la ecuación $y - (x - \alpha)^2 = 0$.

métrica de curvas planas se define mediante la relación (7.12). Convengamos en considerar que la función $F(x, y, \alpha)$ es diferenciable en el dominio de su definición. Introduzcamos el concepto de *envolvente* de la familia de curvas (7.12).

Llámase envolvente de la familia monoparamétrica de curva (7.12) *a una curva O, la cual:* 1) *en cada uno de sus puntos es tangente a una sola curva de la familia* (7.12), 2) *en los puntos distintos es tangente a diferentes curvas de la familia citada*. Razonamientos geométricos ilustrativos sugieren que la envolvente es tangente a las curvas de la familia en los puntos característicos de estas curvas y, por eso, puede considerarse, bajo condiciones determinadas, como lugar geométrico de puntos característicos de las curvas de la familia. En efecto, sea M un punto de tangencia de la envolvente O y la curva L_α de la familia, correspondiente al valor α del parámetro de la familia (fig. 7.4), y P, un punto de tangencia de la envolvente O y la curva $L_{\alpha+\Delta\alpha}$ de la familia, correspondiente al valor $\alpha + \Delta\alpha$ del parámetro, y sea N el punto de intersección de las curvas L_α y $L_{\alpha+\Delta\alpha}$. La figura 7.4 muestra claramente que cuando $\Delta\alpha \to 0$, los puntos P y N tienden al punto M, es decir, la envolvente O es tangente a la curva L_α precisamente en el punto característico M de esta curva.

Llamaremos *curva discriminante* de la familia de curvas (7.12) a un lugar geométrico de puntos característicos de las curvas de esta familia. Aclaremos en qué condiciones una curva discriminante es envolvente. Demostremos previamente el lema siguiente.

Lema. *Sea* $M_0(x_0, y_0)$ *un punto característico de la familia* $F(x, y, \alpha) = 0$, *correspondiente al valor* α_0 *del parámetro de la familia. Supongamos también que las funciones* $F(x, y, \alpha)$ *y* $F'_\alpha(x, y, \alpha)$ *son diferenciables en cierto entorno del punto* (x_0, y_0, α_0) *y que las derivadas parciales de estas funciones respecto de* x *e* y *son continuas en el propio punto* (x_0, y_0, α_0). *Entonces, si en el punto* (x_0, y_0, α_0) *el jacobiano* $\frac{D(F, F'_\alpha)}{D(x, y)}$ *es distinto de cero, la curva discriminante que pasa por* M_0 *puede ser definida en cierto entorno de este punto mediante las ecuaciones paramétricas* $x = \varphi(\alpha)$ *e* $y = \psi(\alpha)$, *donde* $\varphi(\alpha)$ *y* $\psi(\alpha)$ *son unas funciones diferenciables en cierto entorno de* α_0 *de la función.*

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto $M_0(x_0, y_0)$ es un punto característico de la curva de la familia, correspondiente al valor α_0 del parámetro de la familia, entonces $F(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$ y $F'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$, y, por eso, en virtud del lema, el sistema de ecuaciones (7.13) que define los puntos característicos de las curvas de la familia, satisface todas las exigencias del teorema 6.2 de resolubilidad del sistema de ecuaciones respecto de x e y. Por consiguiente, en cierto entorno del punto α_0 están definidas dos funciones

$$x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha). \tag{7.14}$$

que constituyen una única solución, continua y diferenciable, del sistema (7.13). Una curva, definida mediante las ecuaciones paramétricas (7.14), se compone de los puntos característicos y es, por eso, curva discriminante de la familia que pasa por el punto M_0. Advirtamos que, siendo única la solución del sistema (7.13), los puntos diferentes de la curva discriminante definida mediante las ecuaciones paramétricas (7.14) son puntos característicos de las diferentes curvas de la familia (7.12). Demos a conocer, ahora, las condiciones complementarias cuyo cumplimiento asegura que una curva discriminante que pasa por el punto M_0, sea *envolvente* en cierto entorno de este punto.

Teorema 7.1. Supongamos que, además de las condiciones enunciadas en el lema, se cumplen las condiciones siguientes: 1) en cierto entorno del punto (x_0, y_0, α_0) las derivadas F'_x, F'_y, $F''_{\alpha x}$, $F''_{\alpha y}$ y $F''_{\alpha\alpha}$ son continuas; 2) en el punto (x_0, y_0, α_0) se verifican las relaciones $F'^2_x + F'^2_y \neq 0$, $F''_{\alpha\alpha} \neq 0$. Entonces, una curva discriminante que pasa por el punto característico $M_0(x_0, y_0)$ es en cierto entorno de este punto una envolvente de la familia de curvas en consideración.

DEMOSTRACIÓN. Ya nos hemos convencido de que cierto tramo de la curva discriminante que pasa por el punto M_0 puede ser definido, bajo las condiciones formuladas, mediante las ecuaciones paramétricas (7.14) que constituyen la solución del sistema (7.13). Pongamos esta solución en las ecuaciones (7.13) y diferenciemos respecto de α las identidades obtenidas $F(x, y, \alpha) \equiv 0$ y $F_\alpha(x, y, \alpha) \equiv 0$. Obtendremos

$$\left.\begin{aligned} F'_x \frac{dx}{d\alpha} + F'_y \frac{dy}{d\alpha} + F'_\alpha \equiv 0, \\ F''_{\alpha x} \frac{dx}{d\alpha} + F''_{\alpha y} \frac{dy}{d\alpha} + F''_{\alpha\alpha} \equiv 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.15)$$

Por cuanto $F'_\alpha \equiv 0$, la primera relación de (7.15) toma una forma

$$F'_x \frac{dx}{d\alpha} + F'_y \frac{dy}{d\alpha} \equiv 0.$$

Vemos que en todo punto de la curva discriminante que se considera se cumple la condición de tangencia (7.11) de esta curva y de la correspondiente curva de la familia. Por eso, en virtud de la observación 2 del p. 1, para dar por terminada la demostración del teorema, basta establecer que cada punto característico de la curva de la familia dispuesto en cierto entorno del punto M_0 y cada punto de la curva discriminante en este entorno son ordinarios. Por hipótesis del teorema, en el punto (x_0, y_0, α_0) se cumple la relación $F'^2_x + F'^2_y \neq 0$, la cual se cumplirá también, en virtud de que las derivadas parciales F'_x y F'_y son continuas, en cierto entorno del punto mencionado. Por consiguiente, en este entorno todos los puntos característicos de las curvas de la familia son ordinarios. De la relación $F''_{\alpha\alpha} \neq 0$ (válida

en virtud de que esta derivada es continua en cierto entorno del punto (x_0, y_0, α_0)) y de la segunda identidad (7.15) se deduce que en el citado entorno las derivadas $\frac{dx}{d\alpha}$ y $\frac{dy}{d\alpha}$ no se anulan simultáneamente *). De este modo, todos los puntos de la curva discriminante en cierto entorno de M_0 son ordinarios. Del lema que acabamos de demostrar también se deduce que diferentes puntos de la curva discriminante son puntos característicos de las distintas curvas de la familia. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Los razonamientos aducidos al demostrar el teorema muestran que en el caso en que quedan cumplidas solamente las condiciones del lema, en cada punto de la curva discriminante se cumple la condición de tangencia de esta curva y de la curva de la familia. Ya se ha notado (véase observación 2, p. 1) que la condición de tangencia se cumple también cuando el punto común de dos curvas es un punto singular por lo menos de una de ellas. De aquí se desprende que la curva discriminante puede ser un lugar geométrico de puntos singulares de las curvas de la familia (si en cada punto característico se cumple la condición $F_x'^2 + F_y'^2 = 0$). Indiquemos que la propia curva discriminante también puede tener puntos singulares (si $\frac{dx}{d\alpha}$ y $\frac{dy}{d\alpha}$ son simultáneamente iguales a cero).

OBSERVACIÓN 2. El teorema 7.1 puede interpretarse en el lenguaje geométrico del modo siguiente. *Si todas las curvas de la familia y la curva discriminante no tienen puntos singulares, la citada curva discriminante es una envolvente.*

Veamos algunos ejemplos.

1°. Hállese la curva discriminante de una familia $y - (x - \alpha)^2 = 0$.

Tenemos $F(x, y, \alpha) = y - (x - \alpha)^2$, $F'_\alpha(x, y, \alpha) = 2(x - \alpha)$. De este modo, el sistema (7.3) tiene por expresión

$$y - (x - \alpha)^2 = 0, \quad 2(x - \alpha) = 0.$$

De aquí se deduce que los puntos característicos tienen por coordenadas $(\alpha, 0)$ (véase fig. 7.1). Por eso, la curva discriminante se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \alpha, \quad y = 0.$$

Luego, se tiene $F'_x = -2(x - \alpha)$, $F'_y = 1$. En los puntos de la curva discriminante $F_x'^2 + F_y'^2 = 1$. Además, $F''_{\alpha\alpha} = -2 \neq 0$. De

*) La continuidad de estas derivadas se infiere inmediatamente de la continuidad de las derivadas F'_x, F'_y, $F''_{\alpha x}$, $F''_{\alpha y}$, y $F''_{\alpha\alpha}$ y de las relaciones (7.15), a partir de las cuales las derivadas $\frac{dx}{d\alpha}$ y $\frac{dy}{d\alpha}$ pueden hallarse por el método algebraico.

este modo, la curva discriminante está representada por el eje Ox que es la envolvente.

2°. Hállese la curva discriminante de una familia $(y-\alpha)^2 - (x-\alpha)^3 = 0$. Tenemos: $F(x, y, \alpha) = (y-\alpha)^2 - (x-\alpha)^3$, $F'_\alpha(x, y, \alpha) = -2(y-\alpha) + 3(x-\alpha)^2$. El sistema (7.13) tiene por expresión

$$(y-\alpha)^2 - (x-\alpha)^3 = 0, \quad -2(y-\alpha) + 3(x-\alpha)^2 = 0.$$

De aquí proviene que la curva discriminante consiste en dos líneas rectas, definidas mediante las ecuaciones paramétricas

$$x=\alpha, \quad y=\alpha \quad \text{y} \quad x=\frac{4}{9}+\alpha, \quad y=\frac{8}{27}+\alpha$$

(véase fig. 7.2). Es fácil convencerse de que en los puntos de la recta $x=\alpha$, $y=\alpha$ se cumple la condición $F_y'^2 + F_y''^2 = 0$, es decir, esta parte de la curva discriminante es un lugar geométrico de puntos singulares de las curvas de la familia. El lector se convencerá fácilmente de que la recta $x=\frac{4}{9}+\alpha$, $y=\frac{8}{27}+\alpha$ es la envolvente de la familia de curvas en consideración.

4. Envolvente y superficie discriminante de una familia monoparamétrica de superficies. Veamos una familia monoparamétrica de superficies que se define mediante una ecuación

$$F(x, y, z, \alpha) = 0. \tag{7.16}$$

Supondremos, además, que la función $F(x, y, z, \alpha)$ es diferenciable en su dominio de definición. Una línea L en la superficie de la familia (7.16), correspondiente al valor α del parámetro de la familia, se llama *característica* si las coordenadas de los puntos de esta línea satisfacen un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, \alpha) &= 0, \\ F'_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

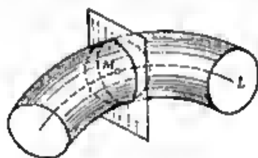


Fig. 7.5

Un lugar geométrico de las características recibe el nombre de *superficie discriminante* de la familia (7.17). *Llámase envolvente de una familia monoparamétrica de superficies* (7.16) *a una superficie O, tangente a todas las superficies de la familia.*

Podemos demostrar la afirmación siguiente.

Si ninguna de las superficies de una familia ni la superficie discriminante tienen puntos singulares, la citada superficie discriminante es una envolvente.

Advirtamos que una superficie discriminante puede representar el lugar geométrico de puntos singulares de las superficies de la familia y puede de por sí contar con puntos singulares.

Veamos el ejemplo siguiente. Hállese la envolvente de una familia de esferas de radio constante R, cuyos centros se ubican en los puntos de una curva dada L*) (la fig. 7.5 muestra una de semejantes esferas con centro en el punto M de la curva L), definida mediante las ecuaciones

$$x=\varphi(\alpha), \quad y=\psi(\alpha), \quad z=\chi(\alpha).$$

*) Las envolventes de semejantes familias de esferas se llaman *superficies en canal.*

La familia monoparamétrica de esferas que se considera se define mediante una ecuación:

$$[x-\varphi(\alpha)]^2+[y-\psi(\alpha)]^2+[z-\chi(\alpha)]^2-R^2=0. \tag{7.18}$$

Las características de la familia mencionada de esferas se definen a partir de la ecuación (7.18) y de la ecuación

$$[x-\varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha)+[y-\psi(\alpha)]\,\psi'(\alpha)+[z-\chi(\alpha)]\,\chi'(\alpha)=0. \tag{7.19}$$

La ecuación (7.19) expresa un plano que pasa por el centro M de la esfera, perpendicularmente a la tangente a la curva L. Por eso, las características son unas circunferencias que constituyen las líneas de intersección de las esferas en consideración con los planos (7.19) (véase fig. 7.5). Notemos que si L es una circunferencia, la envolvente será un toro.

§ 2. Osculación de las curvas planas

1. Concepto de orden de osculación de las curvas planas. Supongamos que dos curvas L_1 y L_2 se tocan en cierto punto M_0 *) (fig. 7.6). Supongamos también que M es un punto arbitrario en la tangente común a las curvas L_1 y L_2, y M_1, M_2 son los puntos de intersección con las curvas L_1 y L_2 de la perpendicular a la tangente mencionada, alzada en el punto M **) (véase fig. 7.6). Diremos que *dos curvas L_1 y L_2 tienen en el punto M_0 un orden de osculación n si existe un límite distinto de cero*

$$\lim_{M\to M_0}\frac{|M_1M_2|}{|MM_0|^{n+1}}. \tag{7.20}$$

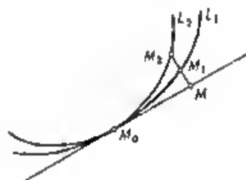


Fig. 7.6

(En este caso $|M_1M_2|$ denota la longitud del segmento M_1M_2, y $|MM_0|$, la longitud del segmento MM_0).

OBSERVACIÓN 1. Si el límite (7.20) es igual a cero, suele decirse que las curvas L_1 y L_2 tienen un orden de osculación superior a n.

OBSERVACIÓN 2. Si dos curvas L_1 y L_2 tienen en el punto M_0 un orden de osculación superior a *cualquier* n, suele decirse que tienen en dicho punto *un orden infinito de osculación*.

EJEMPLOS 1°. Las curvas que representan las gráficas de las funciones $y=x^2$ e $y=3x^2$ son tangentes en el origen de coordenadas O; además, el eje Ox es su tangente común. Al tomar en el eje Ox un punto M de abscisa x, obtendremos que $|OM|=|x|$, y $|M_1M_2|=$ $=|3x^2-x^2|=2x^2$.

*) Es decir, pasan por el punto M_0 y tienen en él tangentes coincidentes.

**) Se supone en este caso que si el punto M es suficientemente próximo a M_0, la perpendicular alzada en el punto M a la tangente corta cada una de las curvas L_1 y L_2 solamente en un punto.

Por cuanto

$$\lim_{M\to 0}\frac{|M_1M_2|}{|OM|^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{|x|^2}=2\neq 0,$$

las curvas en consideración tienen en el punto O un orden de osculación igual a la unidad.

2°. Examinemos ahora dos curvas L_1 y L_2, la primera de las cuales coincide con el eje Ox, y la segunda sirve de gráfica para la función

$$y=\begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{para } x\neq 0,\\ 0 & \text{para } x=0.\end{cases}$$

Cerciorémonos de que las citadas curvas tienen un orden infinito de osculación en el origen de coordenadas O. Por cuanto Ox sirve de tangente común en el punto O, entonces, al tomar en este eje un punto M de abscisa x, llegamos a que $|OM|=|x|$, y $|M_1M_2|=e^{-1/|x|}$. Resulta suficiente demostrar que para cualquier n el límite $\lim\limits_{M\to 0}\frac{|M_1M_2|}{|OM|^{n+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-1/|x|}}{|x|^{n+1}}$ es igual a cero. Suponiendo $t=1/|x|$, reduzcamos este límite al límite $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{n+1}}{e^t}$. Al final del p. 2 § 12, cap. 8 (t. 1) se ha demostrado que el último límite es igual a cero.

2. Orden de osculación de las curvas que sirven de gráfica para las funciones. Supongamos que dos curvas L_1 y L_2 representan las gráficas de las funciones $y=f_1(x)$ e $y=f_2(x)$, respectivamente. Admitamos también que dichas curvas son tangentes en cierto punto $M_0(x_0, f_1(x_0))$; además, el punto M_0 es ordinario para cada una de estas curvas*). Demostraremos que en estas condiciones la definición de orden de osculación de las curvas L_1 y L_2, ofrecida en el punto antecedente, puede ser sustituida por otra definición equivalente, más cómoda para las aplicaciones.

Sea Δx un incremento arbitrario del argumento en el punto x_0, y $x=x_0+\Delta x$. Diremos que *las curvas L_1 y L_2 tienen en el punto $M_0(x_0, f_1(x_0))$ un orden de osculación n si existe un límite distinto de cero*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|f_2(x_0+\Delta x)-f_1(x_0+\Delta x)|}{|\Delta x|^{n+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f_2(x)-f_1(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}. \quad (7.21)$$

Para poder hablar del orden de osculación de las curvas en consideración L_1 y L_2 en el sentido de la definición dada en el punto

*) La definición de punto ordinario de una curva, definida mediante la ecuación $F(x, y)=0$, fue propuesta en el p. 1, § 1. En particular, para una curva, definida mediante la ecuación $y=f(x)$, el punto $M_0(x_0, f(x_0))$ será ordinario si la derivada $f'(x)$ es solamente continua en un punto x_0.

antecedente, es necesario, ante todo, demostrar que en cierto entorno de M_0 dichas curvas se proyectan *unívocamente* sobre su tangente común. De esto se trata en el lema 1 que viene más abajo. La parte restante del presente punto se dedica a la demostración de dos lemas más, de los cuales se deduce inmediatamente la equivalencia de dos definiciones de orden de osculación de las curvas L_1 y L_2.

Lema 1. Si el punto $M_0(x_0, f(x_0))$ es un punto ordinario de una curva L que sirve de gráfica para la función $y = f(x)$, la curva L en cierto entorno de M_0 se proyecta unívocamente sobre su tangente.

DEMOSTRACIÓN. Notemos, ante todo, que la existencia de la tangente a la curva L en el punto M_0 se desprende de la existencia de la derivada $f'(x_0)$. Pasemos ahora a un nuevo sistema de coordenadas rectangulares cartesianas XY, colocando el nuevo origen en el punto de tangencia M_0 y dirigiendo el eje

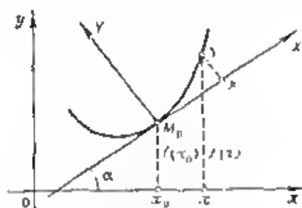


Fig. 7.7

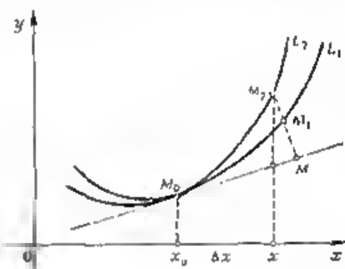


Fig. 7.8

X por la tangente en M_0 (fig. 7.7). Si denotamos con α el ángulo entre el eje x y el eje X, el nuevo sistema de coordenadas se obtiene, evidentemente, del antiguo por la traslación del origen de coordenadas al punto $M_0(x_0, f(x_0))$ y el giro de los ejes a un ángulo α. Haciendo uso de las fórmulas conocidas de transformación de las coordenadas al trasladar y al girar los ejes (véase el fascículo 8), obtendremos la expresión siguiente para las nuevas coordenadas X, Y de los puntos de la curva L en términos de las coordenadas antiguas x e $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} X &= [x - x_0]\cos\alpha + [f(x) - f(x_0)]\,\text{sen}\,\alpha, \\ Y &= -(x - x_0)\,\text{sen}\,\alpha + [f(x) - f(x_0)]\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (7.22)$$

Alcanzaremos nuestro objetivo si mostramos que a base de las ecuaciones (7.22) podemos expresar Y como una función de X (esto significará precisamente que el tramo de la curva L, adyacente a M_0, se proyecta unívocamente sobre el eje X, es decir, sobre la tangente). Para ello basta probar que en un entorno del punto M_0 la primera de las ecuaciones (7.22) es unívocamente resoluble respecto de x. (Efectivamente, expresando x a través de X de la primera ecuación (7.22) y colocando la expresión obtenida en la segunda ecuación (7.22), definiremos Y como una función de X). De conformidad con el teorema 6.1, es suficiente demostrar que la derivada respecto de x del miembro derecho de la primera de las ecuaciones (7.22) es distinta de cero en el punto x_0 y es continua en este punto. Pero esto es evidente, pues la derivada mencionada se expresa como $\cos\alpha + f'(x)\,\text{sen}\,\alpha$, y en el punto x_0, donde $f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha$, es igual a $1/\cos\alpha$. Por cuanto $\alpha \neq \pi/2$, resulta que $\cos\alpha \neq 0$. El lema está demostrado.

Supongamos que las curvas L_1 y L_2 que sirven de gráficas de las funciones $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ son tangentes en el punto $M_0(x_0, f_1(x_0))$, ordinario para cada una de estas curvas, y $x = x_0 + \Delta x$. Supongamos también que desde el punto $M_2(x, f_2(x))$ está trazada una perpendicular sobre la tangente en M_0 (fig. 7.8); M_1 es el punto de intersección de esta perpendicular con la curva L_1*), y M, con la tangente. En estas condiciones resultan válidas las afirmaciones siguientes.

Lema 2. Existe un límite distinto de cero

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|f_2(x)-f_1(x)|}{|M_1M_2|}. \qquad (7.23)$$

Lema 3. Existe un límite distinto de cero

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|M_0M|}{|\Delta x|}. \qquad (7.24)$$

Notemos que de los lemas 2 y 3 se infiere que el límite (7.21), distinto de cero, existe cuando, y solo cuando, existe el límite (7.20), distinto de cero, lo que significa precisamente que las dos definiciones de orden de osculación son equivalentes. Pasamos a la demostración de los lemas 2 y 3.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Denotemos, para simplificar, la distancia M_1M_2 con ρ y, para concretar, convengamos en considerar que las curvas L_1 y L_2 están según muestra la fig. 7.8. Si X e Y son coordenadas del punto M_1, y α es el ángulo de inclinación de la tangente en M_0 al eje Ox, entonces evidentemente,

$$X = x + \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$
$$Y = f_2(x) - \rho\cos\alpha.$$

Por cuanto el punto M_1 se dispone en la curva L_1, resulta que $Y = f_1(X)$, o bien $f_2(x) - \rho\cos\alpha = f_1(x + \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha)$. Aplicando al segundo miembro de la última igualdad la fórmula de Lagrange con relación al segmento $[x, x + \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha]$ tendremos

$$f_2(x) - \rho\cos\alpha = f_1(x) + \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha f_1'(\xi),$$

donde ξ es cierto punto dispuesto en el interior del segmento indicado. Por cuanto $\rho\to 0$ para $\Delta x\to 0$ y la derivada $f_1'(x)$ es continua en el punto x_0, la última igualdad puede ser escrita en la forma

$$f_2(x) - \rho\cos\alpha = f_1(x) + \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\,[f_1'(x_0) + \varepsilon], \qquad (7.25)$$

donde $\varepsilon\to 0$ para $\Delta x\to 0$. Considerando que $f_1'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$, de (7.25) obtendremos

$$\frac{f_2(x)-f_1(x)}{\rho} = \frac{1}{\cos\alpha} + \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

El lema 2 está demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3. Denotemos con β el ángulo comprendido entre la cuerda M_0M_2 y la tangente M_0M (fig. 7.9). Evidentemente, $\beta\to 0$ para $\Delta x\to 0$. De los triángulos rectángulos M_0M_2P y M_0M_2M (aquí, M_0P es paralelo al eje Ox) encontramos

$$|M_0M_2| = \frac{|\Delta x|}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{|M_0M|}{\cos\beta}.$$

*) En virtud del lema 1, para Δx suficientemente pequeño habrá un solo punto de este género.

La última fórmula evidencia que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|M_0M|}{|\Delta x|}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

El lema 3 está demostrado.

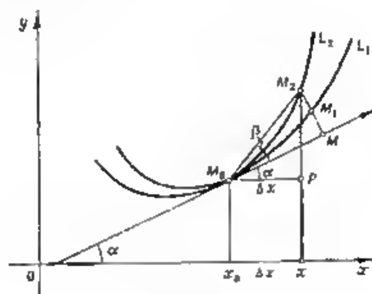


Fig. 7.9

3. Condiciones suficientes de osculación de orden n. Supongamos, al igual que antes, que las curvas L_1 y L_2, que sirven de gráficas para las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, son tangentes en el punto $M_0(x_0, f_1(x_0))$. Es válida la afirmación siguiente.

Teorema 7.2. *Sean $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ funciones $(n+1)$ veces diferenciables en cierto entorno del punto x_0; sean, además, las derivadas de $(n+1)$-ésimo orden continuas en el propio punto x_0. Entonces, si en el punto x_0 se verifican las relaciones*

$$f_1(x_0)=f_2(x_0),\ f_1'(x_0)=f_2'(x_0),\ \ldots$$
$$\ldots,\ f_1^{(n)}(x_0)=f_2^{(n)}(x_0),\ f_1^{(n+1)}(x_0)\neq f_2^{(n+1)}(x_0), \quad (7.26)$$

las curvas L_1 y L_2 tienen en el punto $M_0(x_0, f_1(x_0))$ un orden de osculación n.

DEMOSTRACIÓN. Sea $F(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Es suficiente demostrar que existe un límite distinto de cero

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|F(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}.$$

Por cuanto, en virtud de (7.26), $F(x_0) = F'(x_0) = \ldots$ $\ldots = F^{(n)}(x_0) = 0$, $F^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, entonces, al escribir para la función $F(x)$ la fórmula de Taylor con el término residual en forma

de Lagrange, tendremos

$$F(x)=\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1. \quad (7.27)$$

Por ser continua la derivada de $(n+1)$-ésimo orden en el punto x_0,

$$F^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))=F^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon, \quad (7.28)$$

donde $\varepsilon\to 0$ cuando $x\to x_0$. De las relaciones (7.27) y (7.28) obtenemos

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|F(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}|F^{(n+1)}(x_0)|\neq 0.$$

El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Si se cumplen todas las condiciones del teorema 7.2, a excepción, quizás, de la condición $f_1^{(n+1)}(x_0)\neq f_2^{(n+1)}(x_0)$, podemos afirmar que las curvas L_1 y L_2 tienen en el punto M_0 un orden de osculación no inferior a n.

OBSERVACIÓN 2. Aclaremos el orden de osculación de la curva L, que sirve de gráfica de la función $y=f(x)$, con su tangente T en el punto $M_0(x_0, f(x_0))$. Consideraremos, además, que la función $f(x)$ es tres veces diferenciable en un entorno del punto x_0 y que su tercera derivada es continua en el punto x_0. Recordemos que la tangente T sirve de gráfica de la función lineal $y=\varphi(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Por cuanto $\varphi(x_0)=f(x_0)$, $\varphi'(x_0)=f'(x_0)$ y $\varphi''(x_0)=0$, entonces, si $f''(x_0)\neq 0$, la curva L tiene con su tangente T un orden de osculación $n=1$, y cuando $f''(x_0)=0$, el orden mencionado de osculación no es inferior a dos.

4. **Circunferencia osculatriz.** Supongamos que $M_0(x_0, y_0)$ es un punto de la curva L que sirve de gráfica de la función $y=f(x)$, la cual tiene tercera derivada continua en el punto x_0. Por el punto M_0 se pueden trazar un número infinito de circunferencias tangentes a la curva L en dicho punto. Es fácil convencerse de que la parte de cada una de semejantes circunferencias, dispuesta en cierto entorno del punto M_0, es una gráfica de la función de la forma $y=y(x)$. Por eso, podemos hablar del orden de osculación de la curva L y cualquiera de las circunferencias citadas en su punto común M_0. Aquella de las citadas circunferencias que tiene con la curva L *un orden de osculación no inferior a dos* se denomina *circunferencia osculatriz a la curva L en el punto M_0*. La afirmación siguiente establece las condiciones suficientes para que la curva L tenga en el punto M_0 una circunferencia osculatriz.

Teorema 7.7. *Supongamos que una curva L sirve de gráfica de la función $y=f(x)$, con la particularidad de que $f(x)$ tiene en el punto x_0 una derivada de segundo orden, distinta de cero, y tercera derivada, continua. Entonces, en el punto $M_0(x_0, f(x_0))$ existe una circunferencia osculatriz a la curva L.*

DEMOSTRACIÓN. Buscaremos la ecuación de la circunferencia osculatriz en la forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2, \tag{7.29}$$

donde a, b y ρ son unas constantes que han de ser definidas. Resolvamos la ecuación (7.29) respecto de y y pongamos la solución hallada $y = y(x)$ en el primer miembro de (7.29). Entonces, podemos considerar (7.29) como una identidad respecto de x (considerando, por supuesto, que $y = y(x)$). Diferenciemos la identidad (7.29) dos veces respecto de x y exijamos que en las relaciones que se obtienen como resultado de la diferenciación y en la propia relación (7.29) los valores y_0, y_0', y'' de la función $y = y(x)$ y de dos primeras derivadas suyas en el punto x_0 sean iguales a $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, respectivamente:

$$y_0=f(x_0), \quad y_0'=f'(x_0), \quad y_0''=f''(x_0).$$

De este modo, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones respecto de a, b y ρ:

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=\rho^2,$$
$$(x_0-a)+(y_0-b)\,y_0'=0,$$
$$1+(y_0')^2+(y_0-b)\,y_0''=0.$$

A condición de que $y''=f''(x_0)\neq 0$, $\rho>0$, este sistema tiene una solución única:

$$a=x_0-\frac{1+y_0'^2}{y_0''}\,y_0', \quad b=y_0+\frac{1+y_0'^2}{y_0''}, \quad \rho=\frac{(1+y_0'^2)^{3/2}}{|y_0''|}. \tag{7.30}$$

De los razonamientos aducidos se desprende que para una circunferencia, cuyo centro tiene por coordenadas (a, b) y cuyo radio ρ se define mediante las fórmulas (7.30), y para la curva L se cumplen todas las condiciones de la observación 1 al teorema 7.2. Por eso, la citada circunferencia será osculatriz.

OBSERVACIÓN. Si, en las condiciones del teorema 7.3, el requisito $f''(x_0)\neq 0$ se sustituye por el opuesto, $f''(x_0)=0$, la curva L en el punto M_0 no posee circunferencia osculatriz.

No obstante, en virtud de la observación 2 al teorema 7.2, en este caso la curva L y la tangente a la misma en el punto M_0 tienen en el punto mencionado un orden de osculación no inferior a dos. De este modo, podemos considerar que en el caso que se examina la circunferencia osculatriz degenera en el punto M_0 a una recta.

§ 3. Curvatura de una curva plana

1. Concepto de curvatura de una curva plana. Supongamos que una curva L está dada mediante las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$. Convengamos en considerar que para la curva L se cumplen las condiciones especificadas en el § 1, cap. 2 *). En tal caso, podemos elegir una dirección positiva en cualquier punto M de la curva L. Pongámonos de acuerdo llamar dirección positiva en el punto dado M de la curva L aquella, en la cual se desplazará el punto M al aumentar el parámetro t.

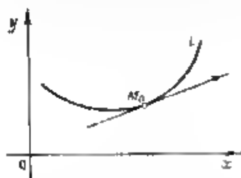


Fig. 7.10

Fijemos ahora en la curva L un punto M_0, correspondiente al valor del parámetro t_0, y supongamos que este punto es *un punto ordinario* de la curva L.

Entonces, el tramo de la curva L, adyacente al punto M_0, será la gráfica de una función de la forma o bien $y = f(x)$, o bien $x = f_1(y)$, y, además, existe una tangente a la curva L en el punto M_0. Introduzcamos en esta tangente la dirección positiva correspondiente a la dirección positiva en el punto M_0 de la curva L **).

En adelante vamos a analizar sólo la tangente dirigida. En la fig. 7.10 la dirección de la tangente se indica con una flecha.

Ahora, supongamos que *todos los puntos de la curva L*, dispuestos en cierto entorno del punto fijo M_0, *son ordinarios*. Sea M uno de los puntos indicados. Introduzcamos la noción de *ángulo de contingencia* del tramo de la curva M_0M. Para concretar, consideraremos que el punto M corresponde a un valor mayor del parámetro que el punto M_0.

Llamaremos *ángulo de contingencia del tramo de la curva M_0M* a un ángulo formado por las tangentes dirigidas a la curva L en los puntos M y M_0, el cual se toma con el signo más, si la tangente en el punto M_0 ha de ser girada en el sentido contrahorario para hacerla coincidir con la tangente en el punto M por la vía más corta, y con el signo menos, en el caso contrario.

En la fig. 7.11 está expuesto el tramo M_0M con un ángulo de contingencia positivo, y en la fig. 7.12, el tramo M_0M con un ángulo de contingencia negativo.

---

*) Es decir, consideraremos que la curva L no tiene puntos múltiples ni tramos de autocolocación.

**) Es decir, convengamos en llamar dirección positiva en la tangente aquella, en la que se desplazará, al aumentar el parámetro, un punto que representa la proyección de un punto de la curva L sobre la tangente.

Introduzcamos también el concepto de *curvatura media del tramo* M_0M *de una curva. Llámase curvatura media del tramo* M_0M *de una curva a la razón entre el ángulo de contingencia de este tramo y la longitud del mismo.*

Por cuanto el punto M_0 de la curva L se considera fijo, la curvatura media del tramo M_0M será una función del punto M, o una fun-

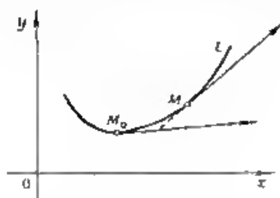


Fig. 7.11

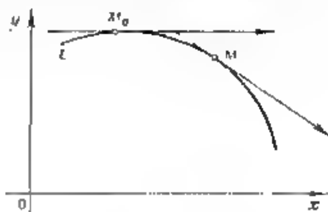


Fig. 7.12

ción del parámetro t. Denotaremos esta función con el símbolo $\varkappa_{M_0}(M)$, o bien $\varkappa_{M_0}(t)$.

Surge, naturalmente, una cuestión sobre el análisis del límite de esta función cuando el punto M tiende a lo largo de la curva L al punto M_0 (o bien, lo que es lo mismo, al tender el parámetro t hacia t_0).

Definición. *El valor límite de la curvatura media del tramo* M_0M *de una curva, cuando el punto* M *tiende a lo largo de la curva al punto* M_0, *lleva el nombre de curvatura en el punto dado* M_0 *de la curva* L *y se designa por el símbolo* $k(M_0)$.

De este modo, por definición,

$$k(M_0) = \lim_{M \to M_0} \varkappa_{M_0}(M) = \lim_{t \to t_0} \varkappa_{M_0}(t).$$

Queda a cargo del lector cerciorarse de que: 1) tanto la curvatura media de cualquier tramo de una línea recta, como también la curvatura en cualquier punto de dicha línea son iguales a cero, 2) tanto la curvatura media de cualquier tramo de una circunferencia de radio R, como también la curvatura en cualquier punto de dicha circunferencia son iguales a $1/R$.

Establezcamos una fórmula para calcular la curvatura en cualquier punto arbitrario de la curva L.

2. Fórmula para calcular la curvatura. Sea L una curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, y sea M_0 un punto fijo de esta curva, correspondiente al valor del parámetro t_0. Supongamos que todos los puntos de la curva L de cierto entorno de M_0 son ordinarios y que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen en el

punto t_0 segundas derivadas. En estas condiciones establezcamos la fórmula general para el cálculo de la curvatura de la curva L en el punto M_0.

Sean $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ los valores de las derivadas primera y segunda de la función $x = x(t)$ en el punto t_0, y sea $\dot{x} + \Delta\dot{x}$, el valor de la primera derivada de esta función en el punto $t_0 + \Delta t$ (Δt es un incremento arbitrario del parámetro t). De este modo, $\Delta\dot{x}$ es el incremento de la primera derivada de la función $x = x(t)$. Supongamos que $\dot{y}$, $\ddot{y}$ e $\dot{y} + \Delta\dot{y}$ son los valores correspondientes de las derivadas de la función $y = y(t)$.

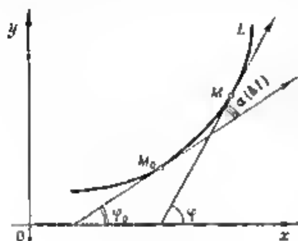


Fig. 7.13

Al considerar que el punto M_0, correspondiente al valor del parámetro t_0, es fijo, mientras que M corresponde al valor del parámetro $t = t_0 + \Delta t$, el ángulo de contingencia del tramo M_0M y la longitud de este tramo pueden considerarse *como funciones del argumento* Δt. Denotaremos estas funciones con $\alpha(\Delta t)$ y $l(\Delta t)$, respectivamente.

Por definición, la curvatura $k(M_0)$ en el punto M_0 de la curva es igual al valor límite

$$k(M_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{l(\Delta t)}. \tag{7.31}$$

Demostremos que el valor límite (7.31) existe y calculémoslo.

Denotemos con φ_0 y φ los ángulos de inclinación al eje Ox de las tangentes a la curva L trazadas por los puntos M_0 y M respectivamente (fig. 7.13). Entonces, evidentemente, cualquiera que sea la disposición de los puntos M_0 y M, para el ángulo de contingencia $\alpha(\Delta t)$ será válida la relación

$$\alpha(\Delta t) = \varphi - \varphi_0.$$

De la última relación se deduce que

$$\operatorname{tg}\alpha(\Delta t) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_0}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_0}. \tag{7.32}$$

Partiendo del sentido geométrico de la derivada (véase el p. 4, § 1, cap. 5, t. 1) y de la expresión para la derivada de una función dada paramétricamente (véase § 11, cap. 5, t. 1) podemos escribir

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\dot{y} + \Delta\dot{y}}{\dot{x} + \Delta\dot{x}}.$$

De este modo, la fórmula (7.32) puede ser escrita en la forma

$$\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)=\frac{\dfrac{\dot y+\Delta\dot y}{\dot x+\Delta\dot x}-\dfrac{\dot y}{\dot x}}{1+\dfrac{\dot y(\dot y+\Delta\dot y)}{\dot x(\dot x+\Delta\dot x)}}=\frac{\dot x\cdot\Delta\dot y-\dot y\cdot\Delta\dot x}{\dot x(\dot x+\Delta\dot x)+\dot y(\dot y+\Delta\dot y)}. \qquad (7.33)$$

Por cuanto las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ tienen en el punto t_0 segundas derivadas, las primeras derivadas de estas funciones en el punto t_0 son continuas y, por lo tanto,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\dot y=0, \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\Delta\dot x=0.$$

Pero, en este caso, en virtud de la igualdad (7.33),

$$\lim_{\Delta t\to 0}\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)=0.$$

De la última igualdad y de que el arco tangente es continuo se desprende que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta t)=0.$$

Por eso se verifica la igualdad

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha(\Delta t)}{\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\left[\cos\alpha(\Delta t)\frac{\alpha(\Delta t)}{\operatorname{sen}\alpha(\Delta t)}\right]=1. \qquad (7.34)$$

La igualdad (7.34) y el teorema del valor límite del producto reduce el problema de cálculo del valor límite (7.31) al cálculo del valor límite siguiente:

$$k(M_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)}{l(\Delta t)}. \qquad (7.35)$$

Para el cálculo de este valor límite notemos que la longitud $l(\Delta t)$ del tramo de la curva M_0M se define por la fórmula

$$l(\Delta t)=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\sqrt{\dot x^2(\tau)=\dot y^2(\tau)}\,d\tau.$$

Al aplicar la fórmula del valor medio a la integral del segundo miembro de la última igualdad, obtendremos

$$l(\Delta t)=\Delta t\sqrt{\dot x^2(\tau^*)+\dot y^2(t^*)}, \qquad (7.36)$$

donde $t_0\leqslant t^*\leqslant t_0+\Delta t$.

Las relaciones (7.35), (7.33) y (7.36) permiten concluir que el cálculo de la curvatura se reduce al cálculo del valor límite

$$k(M_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dot{x}\dfrac{\Delta\dot{y}}{\Delta t}-\dot{y}\dfrac{\Delta\dot{x}}{\Delta t}}{[\dot{x}(\dot{x}+\Delta\dot{x})+\dot{y}(\dot{y}+\Delta\dot{y})]\sqrt{\dot{x}^2(t^*)+\dot{y}^2(t^*)}}. \qquad (7.37)$$

Por cuanto las funciones $x=x(t)$ e $y=y(t)$ tienen en el punto t_0 segundas derivadas, existen los valores límites

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\dot{x}}{\Delta t}=\ddot{x} \quad y \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\dot{y}}{\Delta t}=\ddot{y}. \qquad (7.38)$$

Luego, como las primeras derivadas de las funciones $x=x(t)$ e $y=y(t)$ son continuas, se deduce que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\dot{x}=0, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\Delta\dot{y}=0,$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\dot{x}^2(t^*)+\dot{y}^2(t^*)}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}. \qquad (7.39)$$

La existencia de los valores límites (7.38) y (7.39) condiciona el valor límite del segundo miembro de (7.37), igual a

$$\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{[\dot{x}^2+\dot{y}^2]^{3/2}}.$$

De este modo, queda demostrado que en el punto M_0 la curvatura de la curva L existe y se determina por la fórmula

$$k(M_0)=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{[\dot{x}^2+\dot{y}^2]^{3/2}}. \qquad (7.40)$$

OBSERVACIÓN. Supongamos que se pide calcular la curvatura $k(M_0)$ en un punto dado M_0 de la curva L *que sirve de gráfica para una función dos veces diferenciable* $y=f(x)$.

Adoptando en la fórmula (7.40) $x=t$, $y=f(t)$, obtendremos para la curvatura buscada la fórmula siguiente

$$k(M_0)=\frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}.$$

Por fin, si la curva está dada mediante la ecuación polar $r=r(\theta)$, donde $r(\theta)$ es una función dos veces diferenciable del ángulo polar θ, entonces, tomando por el parámetro t el ángulo polar θ y teniendo presente que $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\operatorname{sen}\theta$, obtendre-

mos la expresión siguiente para la curvatura:

$$k=\frac{r^2(\theta)+2[r'(\theta)]^2-r(\theta)\,r''(\theta)}{\{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2\}^{3/2}}.$$

Calculemos, a título de ejemplo, la curvatura en un punto arbitrario de la catenaria $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$.

Por cuanto

$$1+[f'(x)]^2=\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}=\frac{y^2}{a^2},\quad f''(x)=\frac{1}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}=\frac{y}{a^2},$$

la curvatura será igual a

$$k=\frac{a}{y^2}=\frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}.$$

§ 4. Evoluta y evolvente

1. Normal a una curva plana. Sea L una curva plana definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t). \tag{7.41}$$

Convengamos en considerar que la curva L no tiene puntos múltiples ni tramos de autocolocación. Además, consideraremos que todo punto de la curva L es ordinario *).

Introduzcamos la noción de normal a una curva en un punto dado M.

Una recta que está dispuesta en el plano de la curva L y que pasa por el punto M de la curva perpendicularmente a la tangente a L en el punto M, se llama normal a L en el punto M (fig. 7.14).

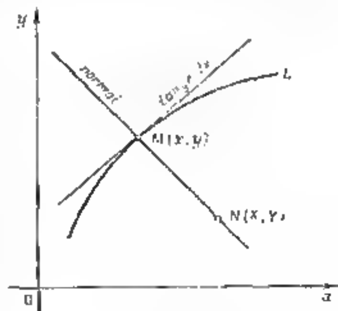


Fig. 7.14

Hallemos la ecuación de la normal a una curva. Sean x e y las coordenadas del punto M de la curva L, y sean X e Y las coordenadas de cualquier punto N de la normal a la curva. Por definición, la normal es perpendicular a la tangente, y, por eso, el coeficiente angular k_n de la normal está asociado con el coeficiente angular k_t de la tangente

*) Advirtamos que en estas condiciones existe una tangente en cada punto de la curva L.

mediante una relación *)

$$k_n k_t = -1. \tag{7.42}$$

Por cuanto el coeficiente angular k_1 de la tangente es igual a $\frac{\psi'}{\varphi'}$ (si la curva (7.41) está definida paramétricamente), de (7.42) obtenemos

$$k_n = -\frac{\varphi'}{\psi'}. \tag{7.43}$$

Haciendo uso de la ecuación de una recta con el coeficiente angular dado k_n, que se conoce por el curso de geometría analítica, obtendremos la siguiente ecuación para la normal a la curva L:

$$Y - y = -\frac{\varphi'}{\psi'}(X - x). \tag{7.44}$$

Teniendo presente que $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, escribamos la ecuación (7.44) en la forma

$$\varphi'(X - \varphi) + \psi'(Y - \psi) = 0. \tag{7.45}$$

OBSERVACIÓN. Cuando la tangente en un punto M es paralela al eje de abscisas, su coeficiente angular k_1 es nulo y, por eso, las relaciones (7.42), (7.43) y (7.44) carecen de sentido. No obstante, en este caso la ecuación (7.45) es la ecuación de la normal. En efecto, si $k_t = 0$ (la tangente es paralela al eje de abscisas), $\psi' = 0$, y $\varphi' \neq 0$ **), por lo cual la relación (7.44) toma la forma: $X - \varphi = 0$. La última forma es la ecuación de una recta perpendicular al eje Ox, la cual, al cortar el eje Ox, deja en el mismo un segmento igual a φ. Está claro que esta recta coincide en el caso que se considera con la normal en el punto M.

2. Evoluta y evolvente de una curva plana. Supongamos que una curva L satisface las mismas condiciones que en el punto antecedente. Volvamos a la ecuación (7.45). Si consideramos t en esta ecuación como un parámetro, ésta es una ecuación *monoparamétrica de una familia de todas las normales* a la curva plana L. Una idea de una familia de normales a una curva plana la ofrece la fig. 7.15.

Bajo determinadas condiciones una familia monoparamétrica de normales cuenta con una envolvente que se denomina evoluta de la curva L.

Así, pues, *llámase evoluta de la curva plana L a la envolvente de una familia monoparamétrica de normales de dicha curva. La curva L, considerada con relación a su evoluta, se denomina evolvente.*

---

*) Esta relación se conoce por el curso de geometría analítica (véase, por ejemplo, el fascículo *Geometría analítica* del presente curso).

**) Recordemos que $k_1 = \frac{\psi'}{\varphi'}$ y para un punto ordinario $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$

Aclaremos las condiciones de existencia de la evoluta de la curva plana L y hallemos sus ecuaciones paramétricas.

Convengamos en considerar que la curva L sin puntos singulares viene dada mediante las ecuaciones paramétricas (7.41). Supongamos, para simplificar, que el parámetro t varía en el intervalo (0, 1). Admitamos también que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ de las relaciones

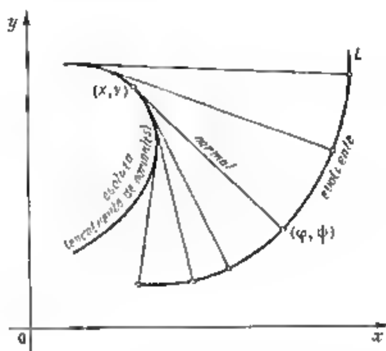


Fig. 7.15

(7.41), tienen terceras derivadas continuas sobre el intervalo (0, 1). Entonces, resulta válido el teorema siguiente.

Teorema 7.4. *Supongamos que en todos los puntos de la curva L su curvatura k y la derivada de la curvatura *) no son nulas. Entonces, existe una evoluta de la curva L, con la particularidad de que las ecuaciones paramétricas de la evoluta tienen por expresión*

$$\left.\begin{aligned} X &= \varphi - \frac{\varphi'^2+\psi'^2}{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}\,\psi', \\ Y &= \psi + \frac{\varphi'^2+\psi'^2}{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}\,\varphi'. \end{aligned}\right\} \tag{7.46}$$

DEMOSTRACIÓN. Hemos definido la evoluta como envolvente de una familia monoparamétrica de normales a la curva L. Esta familia se da mediante la ecuación (7.45). De este modo, la función

*) Para las condiciones impuestas en las funciones φ y ψ la curvatura k es una función diferenciable del parámetro t.

$F(X, Y, t)$ que define la familia se expresa con ayuda de la relación

$$F(X, Y, t) = \varphi'(X - \varphi) + \psi'(Y - \psi), \qquad (7.47)$$

donde t desempeña el papel de parámetro.

Aprovechemos ahora las deducciones del § 1 de este capítulo sobre la existencia de una envolvente para aclarar la cuestión de existencia de una evoluta (es decir, de una envolvente de la familia (7.45)). Hemos de comprobar el cumplimiento de las condiciones del lema del p. 3, § 1 de este capítulo y de las condiciones del teorema 7.1. Pasemos a la comprobación de las condiciones mencionadas. Detengámonos primero en la comprobación de las condiciones del lema. Es evidente que con las exigencias formuladas para las funciones φ y ψ las funciones $F(X, Y, t)$ y $F'_t(X, Y, t)$ son diferenciables. Cerciorémonos ahora de que el jacobiano $\frac{D(F, F'_t)}{D(X, Y)}$ es distinto de cero. Haciendo uso de la expresión (7.40) para la curvatura k de la curva L, podemos representar este jacobiano en la forma siguiente:

$$\frac{D(F, F'_t)}{D(X, Y)} = k\,[\varphi'^2 + \psi'^2]^{3/2}.$$

Por hipótesis del teorema, la curvatura k es distinta de cero. Además, por cuanto todos los puntos de la curva L son ordinarios, tenemos $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$. De este modo, el jacobiano mencionado es distinto de cero y, por consiguiente, todas las condiciones del lema están cumplidas.

Comprobemos ahora las condiciones del teorema 7.1. Es evidente que con las exigencias formuladas para las funciones φ y ψ las derivadas F'_X, F'_Y, F''_{tX}, F''_{tY}, F''_{tt} son continuas. Resta sólo convencerse de que la relación $F''_{tt} \neq 0$ es válida para todos los valores de t del intervalo $(0, 1)$ y para los puntos característicos en las normales a la curva L.

Por cuanto

$$F''_{tt} = \varphi'''(X - \varphi) + \psi'''(Y - \psi) - 3(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'') \qquad (7.48)$$

y, según el p. 2, § 1 de este capítulo y las fórmulas (7.13), los puntos característicos para el caso en cuestión se determinan por las relaciones

$$\varphi'(X - \varphi) + \psi'(Y - \psi) = 0, \qquad (7.49)$$

$$\varphi''(X - \varphi) + \psi''(Y - \psi) - (\varphi'^2 + \psi'^2) = 0,$$

el valor de la derivada F''_{tt} en los puntos característicos será igual, en virtud de (7.48) y (7.49), a

$$F''_{tt} = \frac{\varphi'\psi''' - \varphi'''\psi'}{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}(\varphi'^2 + \psi'^2) - 3(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi''). \qquad (7.50)$$

Volvamos a la expresión (7.40) para la curvatura k de la curva L. Habida cuenta de las designaciones (7.41), obtenemos de la fórmula (7.40) por diferenciación:

$$k' = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{[\varphi'^2+\psi'^2]^{5/2}} \left\{ \frac{\varphi'\psi''' - \varphi'''\psi'}{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'} (\varphi'^2+\psi'^2) - 3(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'') \right\}.$$

Con ayuda de esta relación y de la expresión (7.40) para la curvatura demos a la expresión (7.50) la forma siguiente:

$$F''_{tt} = \frac{k'}{k} (\varphi'^2 + \psi'^2).$$

Dado que, por hipótesis del teorema, k y k' no son nulos y, además, $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$, de la última expresión para F''_{tt} proviene que para todos los valores de t del intervalo (0, 1) y para los puntos característicos de las normales a $L F''_{tt} \neq 0$. De este modo, las condiciones del teorema 7.1 también están cumplidas.

Hallemos ahora las ecuaciones paramétricas de la evoluta. Por cuanto, para las condiciones formuladas, la evoluta es un lugar geométrico de puntos característicos de la familia de normales, las coordenadas X e Y de los puntos de la evoluta se determinan a partir de las relaciones (7.49). Encontrando a partir de estas relaciones X e Y, obtendremos precisamente las ecuaciones paramétricas (7.46). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. En geometría se usan frecuentemente los conceptos de radio de curvatura y de centro de curvatura. Llámase *radio de curvatura* R de una curva L a una magnitud $1/k$, donde k es la curvatura de L, y llámase *centro de curvatura* a un punto de la normal a la curva que dista de un punto dado de la curva L en dirección de la concavidad de L a una magnitud igual a R.

Notemos que el radio de curvatura de una curva es igual al radio de la circunferencia osculadora y el centro de curvatura coincide con el centro de la circunferencia osculatriz.

Cerciorémonos de que *la evoluta es un lugar geométrico de centros de curvatura de la curva*. En efecto, de las relaciones (7.46) obtenemos

$$(X - \varphi)^2 + (Y - \psi)^2 = \frac{1}{k^2} = R^2,$$

es decir, un punto de la evoluta con las coordenadas (X, Y) dista del punto de la curva L con las coordenadas (φ, ψ) a una magnitud R. El sentido geométrico de la evoluta (véase fig. 7.15) muestra que el punto (X, Y) está dispuesto en la normal orientada hacia la concavidad de la curva L.

EJEMPLO. Hallemos las ecuaciones de la evoluta de una elipse $ABCD$ (fig. 7.16) definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t) = a \cos t, \quad y = \psi(t) = b \operatorname{sen} t$$

Por cuanto $\varphi' = -a \operatorname{sen} t$, $\psi' = b \cos t$, $\varphi'' = -a \cos t$, $\psi'' = -b \operatorname{sen} t$, tenemos, pues, $\varphi'^2 + \psi'^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t$, y $\varphi'\psi'' - \varphi''\psi' = ab$. Por eso, de acuerdo con (7.46), las ecuaciones

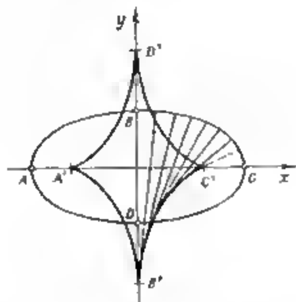


Fig. 7.16

paramétricas de la evoluta de la elipse tienen por expresión

$$X = \frac{a^2-b^2}{a} \cos^3 t, \quad Y = \frac{b^2-a^2}{b} \operatorname{sen}^3 t.$$

De este modo, *la evoluta de una elipse* es la llamada *astroide alargada* (véase fig. 7.16).

Advirtamos que en los puntos A, B, C, D de la elipse (es decir, en sus vértices) la derivada de la curvatura es igual a cero. Por eso, en dichos puntos no se cumplen las condiciones del teorema 7.4. En los puntos correspondientes A', B', C', D' la evoluta de la elipse tiene singularidades, es decir, los llamados puntos de retroceso.

INDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.